

花蓮縣七年級學生數學成就試題表現現況分析

資料來源：

花蓮縣國民中小學教育長期資料庫

107 學年度七年級數學領域學生基本能力檢核試卷

分析者：

國立臺南大學 謝堅老師

	<p>6-n-01：能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解。(質數 < 20，質因數 < 20，被分解數 < 100)。</p> <p>評量重點：</p> <p>6-n-02：能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。</p>
<p>補救教學 建議</p>	<p>(一)利用質因數分解算式求兩數最大公因數和最小公倍數時，應幫助學生察覺最大公因數是這兩數共同質因數的乘積；最小公倍數是這兩數質因數分解算式的乘積，但共同質因數只乘一次。</p> <p>例如：$36 = \underline{2 \times 2 \times 3} \times 3$，$48 = \underline{2 \times 2} \times 2 \times 2 \times \underline{3}$</p> <p>36 和 48 的最大公因數「$\underline{2 \times 2 \times 3}$」，是這兩數共同質因數的乘積。</p> <p>36 和 48 的最小公倍數「$\underline{2 \times 2} \times 2 \times 2 \times \underline{3} \times 3$」，是這兩數質因數分解算式的乘積，但共同質因數只乘一次。</p> <p>(二)下面以「找出 36 和 48 的最小公倍數」為例，說明如何幫助學生解題。</p> <p>步驟一：先將 36 及 48 進行質因數分解：</p> $36 = \underline{2 \times 2 \times 3} \times 3, 48 = \underline{2 \times 2} \times 2 \times 2 \times \underline{3}$ <p>步驟二：接著幫助學生找出</p> <p>36 的倍數是：$\underline{2 \times 2 \times 3} \times 3$、$\underline{2 \times 2 \times 3} \times 3 \times 2$、$\underline{2 \times 2 \times 3} \times 3 \times 3$、$\underline{2 \times 2 \times 3} \times \underline{3 \times 4}$、$\underline{2 \times 2 \times 3} \times 3 \times 5$、$\underline{2 \times 2 \times 3} \times 3 \times 6$、$\underline{2 \times 2 \times 3} \times 3 \times 7$。</p> <p>48 的倍數是：$\underline{2 \times 2} \times 2 \times 2 \times \underline{3}$、$\underline{2 \times 2} \times 2 \times 2 \times \underline{3} \times 2$、$\underline{2 \times 2} \times 2 \times 2 \times \underline{3} \times 3$、$\underline{2 \times 2} \times 2 \times 2 \times \underline{3} \times 4$、$\underline{2 \times 2} \times 2 \times 2 \times \underline{3} \times 5$。</p> <p>步驟三：利用質因數分解算式求兩數最大公因數和最小公倍數時，應幫助學生察覺最大公因數是這兩數共同質因數的乘積；最小公倍數是這兩數質因數分解算式的乘積，但共同質因數只乘一次。</p> <p>例如：$36 = \underline{2 \times 2 \times 3} \times 3$，$48 = \underline{2 \times 2} \times 2 \times 2 \times \underline{3}$</p> <p>36 和 48 的最大公因數「$\underline{2 \times 2 \times 3}$」，是這兩數共同質因數的乘積。</p> <p>36 和 48 的最小公倍數「$\underline{2 \times 2} \times 2 \times 2 \times \underline{3} \times 3$」，是這兩數質因數分解算式的乘積，但共同質因數只乘一次。</p> <p>步驟四：「兩數互質」是判斷短除法運算結果的依據，例如用短除法求 36 和 48 兩數的最大公因數和最小公倍數時，先提</p>

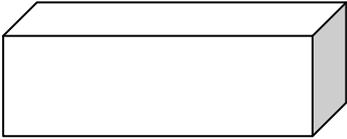
出共同的質因數，發現兩數互質時，最大公因數「 $2 \times 2 \times 3$ 」就是共同質因數的乘積，最小公倍數「 $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 4 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2$ 」是這兩數質因數分解算式的乘積，但共同質因數只乘一次。

$$\begin{array}{l}
 2 \left| \begin{array}{cc} 36 & 48 \end{array} \right. \Rightarrow 2 \text{ 是共同的質因數} \\
 2 \left| \begin{array}{cc} 18 & 24 \end{array} \right. \Rightarrow 2 \text{ 是共同的質因數} \\
 3 \left| \begin{array}{cc} 9 & 12 \end{array} \right. \Rightarrow 3 \text{ 是共同的質因數} \\
 \quad \quad \quad \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} \Rightarrow (3, 4) = 1, \text{ 互質表示沒有其它共同的質因數}
 \end{array}$$

教材地位 分析	<p>先備的知識：</p> <p>4-n-04：能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式的記法與計算。</p> <p>5-n-02：能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。</p> <p>評量重點：</p> <p>6-n-05：能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。</p>
補救教學 建議	<p>(一)教師應進行帶分數的命名活動，幫助學生理解 $4\frac{2}{3}$ 是由 4 和 $\frac{2}{3}$ 合起來的數，也就是說 $4 + \frac{2}{3} = 4\frac{2}{3}$，$4\frac{2}{3} = 4 + \frac{2}{3}$。</p> <p>(二)以計算題「$(7+8) \times 5$」為例，學生的解法應該是「$(7+8) \times 5 = 15 \times 5 = 75$」，學生不可能得到「$(7+8) \times 5 = 7 \times 5 + 8 \times 5$」的結果。</p> <p>乘法對加法的分配律指的是同一個問題情境有兩種不同的解題方法，一種是「$(a+b) \times c$」、另一種是「$a \times c + b \times c$」，因為它們是同一個問題的兩種不同解題方法，運算後的結果必然會相等，可以記成「$(a+b) \times c = a \times c + b \times c$」。</p> <p>(三)教師應透過具體情境幫助學生理解乘法對加法分配律的性質以問題「鉛筆一枝 12 元，甲先買了 5 枝，再買了 3 枝，共花多少元？」為例，可以有下面這兩種算法。</p> <p>算法一：$12 \times 5 + 12 \times 3 = 96$。</p> <p>算法二：$12 \times (5 + 3) = 96$。</p> <p>這兩種算法的答案相同，可以記成 $12 \times 5 + 12 \times 3 = 12 \times (5 + 3)$。也可以記成 $12 \times (5 + 3) = 12 \times 5 + 12 \times 3$。</p> <p>(四)理解乘法對加法分配律的性質有兩個層次：</p> <p>層次一：因為這兩種算法的答案相同，可以記成等式。</p> <p>層次二：因為它們是同一個問題的兩種算法，它們的答案一定相等，可以記成等式。</p> <p>教師應幫助學生提升至層次二，學生必須預期這兩個算式的答案一定相等，國中階段才能將分配律數量的範圍擴充至負數及未知數。</p>

題號	3		
內容領域	數與量	認知歷程向度	概念理解
分年細目	6-n-10：能理解正比的意義，並解決生活中的問題。		
試題內容	<p>請問下列哪個關係成正比？</p> <p>① 甲和乙共有 200 元時，甲和乙錢數的關係</p> <p>② 汽車時速 75 公里時，速率和時間的關係</p> <p>③ 正方體表面積和體積的關係</p> <p>④ 將十元硬幣堆疊成圓柱體時，硬幣的個數和高度的關係</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.09	0.17	0.02
2	0.41	0.48	0.27
3	0.18	0.20	0.16
4*	0.32	0.15	0.56
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.32	鑑別度	0.41
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.41，試題品質良好；通過率為 0.32，試題難易度中偏難。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 4，通過率為 32%，顯示超過三成的學生已理解正比的意義。</p> <p>(3)本題是六、七年級共同試題，六年級的通過率為 29%(高分組 44%、低分組 16%)，七年級的通過率為 32%(高分組 56%、低分組 15%)，七年級的通過率比六年級高了 3%。可能的原因如下：</p> <p>① 國小六年級和國中七年級都有成正比的教材，差別是國小階段透過對應項的比或比值相等引入成正比的定義，而國中階段透過 $y=kx$ 引入成正比的定義。 國中學生因為多學習了一次，因此通過率提高了 3%。</p> <p>② 七年級高分組學生的通過率比六年級高分組學生高了 12%，七年級低分組學生的通過率比六年級低分組學生低了 1%，而整體學生的通過率高了 3%，可能的原因是高分組學生國中階段的學習比較些成效，而低分組學生比較沒有成效。</p> <p>③ 建議教師不宜直接透過 $y=kx$ 引入成正比的定義，先幫助學生複習國小的定義後，再引入國中的定義。</p>		

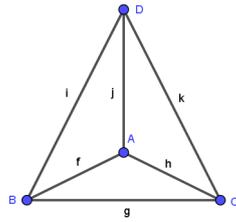
教材地位 分析	<p>先備的知識：</p> <p>5-n-14：能認識比率及其在生活上的應用(含「百分率」、「折」)。</p> <p>6-n-09：能認識比和比值，並解決生活中的問題。</p> <p>評量重點：</p> <p>6-n-10：能理解正比的意義，並解決生活中的問題。</p>																
補救教學 建議	<p>(一)「正比」和「比或比值」的關係密切，比的相等關係強調將相比的兩類量寫在一起，直覺上較簡單；而正比則是兩類量關係中的一種，應採用列表的方式記錄，並強調要使用比值來記錄正比關係，兩者間的關係，可運用列表的方式來統整。</p> <p>下面以同學們同時量出不同長度的竹竿和對應影子長度的表格來說明：</p> <table border="1" data-bbox="469 824 1227 922"> <tr> <td>竹竿長(公分)</td> <td>40</td> <td>50</td> <td>60</td> <td>70</td> <td>80</td> <td>90</td> <td>100</td> </tr> <tr> <td>影子長(公分)</td> <td>20</td> <td>25</td> <td>30</td> <td>35</td> <td>40</td> <td>45</td> <td>50</td> </tr> </table> <p>國小階段可以透過比或比值的方式來表示不同長度的竹竿和對應影子長度的關係。</p> <p>(1)利用最簡單整數比『竹竿長：影子長=2：1』來表示： 竹竿和對應影子長度的對應關係可以記成「40：20」、「50：25」、…、「100：50」，它們都是相等的比，可以利用最簡單整數比「竹竿長：影子長=2：1」來表示。</p> <p>(2)利用比值「竹竿長：影子長=2」來表示： 「40：20」、「50：25」、…、「100：50」這些相等的比的比值都是2，可以透過比值「竹竿長：影子長=2」來表示這些相等的比，也可以說成「竹竿長是影子長的2倍」。</p> <p>(二)成正比是兩個集合間特殊的對應關係，下面都是成正比的定義。</p> <p>(1)竹竿的長度和對應影子的長度同時改變，而它們的比值不變，數學上稱竹竿的長度和影子的長度「成正比」或「成正比例」。</p> <p>(2)形如「$y=kx$」的函數，數學上稱之為成正比。</p> <p>(3)如果函數的圖形是過原點的直線，數學上稱之為成正比。</p> <p>國小階段尚未引入函數的記法，只能透過(1)溝通成正比的意義。</p>	竹竿長(公分)	40	50	60	70	80	90	100	影子長(公分)	20	25	30	35	40	45	50
竹竿長(公分)	40	50	60	70	80	90	100										
影子長(公分)	20	25	30	35	40	45	50										

題號	4		
內容領域	幾何	認知歷程向度	問題解決
分年細目	6-s-04：能認識面與面的平行與垂直，線與面的垂直，並描述正方體與長方體中面與面、線與面的關係。		
試題內容	<p>下圖為一個長方體，長方體有 6 個面，有 12 條邊。長方體中，與塗色的面互相垂直的面有甲個，與塗色的面互相垂直的邊有乙條，請問甲 + 乙 = ?</p>  <p>① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.08	0.11	0.05
2	0.16	0.35	0.03
3	0.06	0.13	0.01
4*	0.70	0.41	0.92
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.70	鑑別度	0.51
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.51，試題品質良好；通過率為 0.70，試題難易度中偏易。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 4，通過率為 70%，顯示七成的學生已能描述長方體中面與面以及線與面的垂直關係。</p> <p>(3)本題是六、七年級共同試題，六年級的通過率為 71%(高分組 90%、低分組 44%)，七年級的通過率為 70%(高分組 92%、低分組 41%)，七年級的通過率比六年級低了 1%。可能的原因如下：</p> <p>①國小六年級引入「面與面的平行與垂直，線與面的垂直」的教材，要求學生在長方體中描述面與面以及線與面的垂直關係，而國中階段沒有引入類似的教材。</p>		

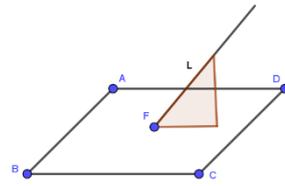
	<p>②七年級高分組學生的通過率比六年級高分組學生高了2%，七年級低分組學生的通過率比六年級低分組學生低了3%，而整體學生的通過率低了2%，可能的原因是高分組學生的學習已內蘊化，而低分組學生的學習沒有內蘊化，比較容易遺忘。</p> <p>③108課綱在九年級引入線與線的平行、垂直與歪斜關係，線與平面的垂直與平行關係。</p>
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>5-s-07：能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。(同5-n-20)</p> <p>評量重點：</p> <p>6-s-01：能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。</p>
補救教學建議	<p>(一)數學上的面向四面八方無限的延伸，而長方體的面是封閉的多邊形區域。在檢驗長方體底面和側面是否互相垂直時，常將長方體底面平放在桌面上來檢驗，當底面在桌面上時，無法檢驗底面和側面是否互相垂直，只能檢驗桌面和側面是否互相垂直，許多學生無法掌握長方體的底面與桌面之間的包含關係，不知道長方體的側面和桌面互相垂直時，長方體的側面也和底面互相垂直。</p> <p>建議教師製作上底和下底是空的，而側面都存在的長方體燈籠骨架模型，將下底平放在桌面上，幫助學生察覺：燈籠骨架模型的底面都在桌面上，底面和桌面都是同一個平面，底面和桌面重合。</p> <p>(二)<u>不宜</u>將兩線平行的定義直接類比至兩平面的平行關係。</p> <p>兩線平行的定義：和一線同時垂直的兩線互相平行。</p> <p>兩平面平行的定義<u>不是</u>：和一平面同時垂直的兩平面互相平</p>

行；而是：和一線同時垂直的兩平面互相平行

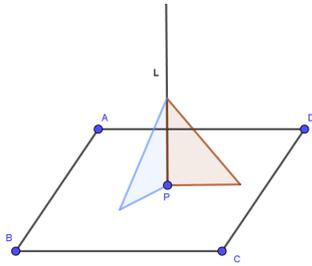
(三)空間中平面與直線的垂直關係很多老師僅用一個直角三角板檢驗，可能會發生如(圖四)的誤差，因此建議老師應以兩個直角三角板擺放不同方向，才能真正確認直角三角板、直線及平面是處處貼合，如圖(五)。



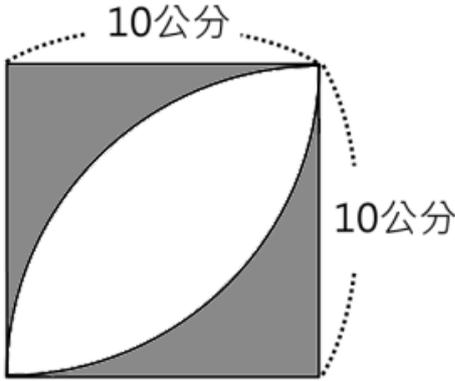
圖(三)

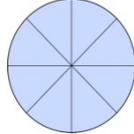
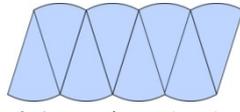
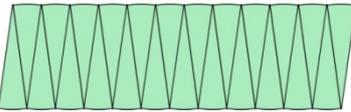


圖(四)

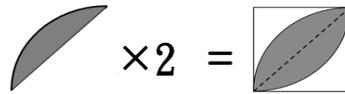


圖(五)

題號	5		
內容領域	幾何	認知歷程向度	問題解決
分年細目	6-n-14：能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。 (同 6-s-03)		
試題內容	<p>如圖，請問灰色部分面積是多少平方公分？(圓周率=3.14)</p>  <p>① 21.5 ② 43 ③ 50 ④ 71.5</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.23	0.32	0.11
2*	0.45	0.18	0.78
3	0.16	0.23	0.06
4	0.16	0.26	0.05
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.45	鑑別度	0.59
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.59，試題品質良好；通過率為 0.45，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 2，通過率為 45%，顯示四成五的學生已具備利用圓面積公式解題的能力。</p> <p>(3)本題是六、七年級共同試題，六年級的通過率為 56%(高分組 88%、低分組 22%)，七年級的通過率為 45%(高分組 78%、低分組 18%)，七年級的通過率比六年級低了 11%。可能的原因如下：</p> <p>①國小六年級學生有較多解複合圖形的解題經驗，而國中七年級沒有這類教材。國小階段本問題的教學可能沒有成效，國小六年級學生因為經常練習，所以通過率比較高，國中七年級因為沒有練習導至解題失敗。</p> <p>②七年級高分組學生的通過率比六年級高分組學生低了 10%，七年級低分組學生的通過率比六年級低分組學生低了 4%，</p>		

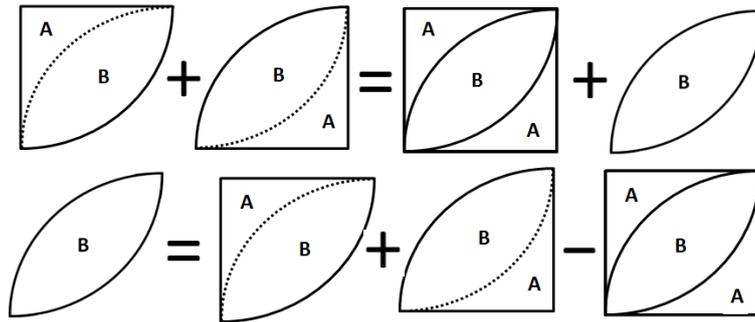
	<p>而整體學生的通過率低了 11%，高分組學生通過率降低的比率比低分組高，可能的原因是部份高分組學生國小階段的學習可能沒有成效，這些學生因為經常練習或記憶做法而答對，而多數低分組學生在國小階段已無法解題。</p>
<p>教材地位 分析</p>	<p>先備的知識：</p> <p>5-n-18：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(同 5-s-05)</p> <p>評量重點：</p> <p>6-n-14：能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。 (同 6-s-03)</p>
<p>補救教學 建議</p>	<p>(一)先將圓切成兩個半圓，再將兩個半圓都切成很多個(例如 8 個或 16 個)全等的扇形，將這兩個切成扇形的半圓上下交錯疊合起來，會變成一個接近平行四邊形(或長方形)的圖形，平行四邊形的底(長方形的長)是圓周長的一半，平行四邊形的高(長方形的寬)是圓的半徑，可以透過平行四邊形(長方形)面積求出圓面積。</p> <p>圓面積 = 平行四邊形面積 = 底 × 高 = 圓周長的一半 × 半徑 = (直徑 × 3.14) ÷ 2 × 半徑 = (直徑 ÷ 2 × 3.14) × 半徑 = 半徑 × 半徑 × 3.14</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>一個被八等分分割的圓</p>  <p>重新組一個被八等分割的圓</p>  <p>重新組一個被二十四等分割的圓</p> </div> </div> <p>(二) 提出兩種解題的方法：</p> <p>方法一：$\frac{1}{4}$圓面積，減去底、高是 10 公分的三角形，得到灰色部</p>

分的一半，再乘以 2 倍後就求出灰色部分面積。



方法二：兩個半徑 10 公分的 $\frac{1}{4}$ 圓相加，減去正方形面積，便得到

B 圖形面積，也就是題目中灰色部分面積。



題號	6		
內容領域	代數	認知歷程向度	概念理解
分年細目	7-a-11：能理解平面直角坐標系。		
試題內容	<p>如下圖所示，若「帥」的位置表示$(-2, 1)$，「相」的位置表示$(3, -1)$，則「炮」的位置應該表示成下列何者？</p> <p>① $(-4, -2)$ ② $(-3, -2)$ ③ $(-2, -3)$ ④ $(-7, -1)$</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.83	0.56	0.99
2	0.08	0.21	0.01
3	0.05	0.15	0.00
4	0.03	0.08	0.00
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.83	鑑別度	0.43
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.43，試題品質良好；通過率為 0.83，試題難易度易。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 1，通過率為 83%，顯示超過八成的學生已能理解平面直角坐標系。</p> <p>(3)有 8%的學生選擇選項 2(低分組有 21%)，這些學生可能不理解平面直角坐標系；也可能將四線相交的那一點看成原點。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>5-n-13：能將分數、小數標記在數線上。</p> <p>6-d-02：能整理生活中的有序資料，並繪製成折線圖。</p> <p>評量重點：</p> <p>7-a-11：能理解平面直角坐標系。</p>		
補救教學建議	<p>(一)很多成人都以為「問路」是引入平面直角坐標的先備知識，這是不正確的想法，「問路」的結果是到達目的地的路徑，與平面直角坐標無關，平面直角坐標的先備知識是一維數線。</p>		

	<p>在一條直線上，設定原點和單位長度後，直線上的每一個點都有一個坐標和它對應，這就是一維數線。如果想標示在平面上但是在直線之外的點，就必須由兩條數線來確定，平面上的直角坐標就是由兩條互相垂直的一維坐標建立而成的。</p> <p>(二)很多成人都以為標示班級坐位的有序數對是引入平面直角坐標的先備知識，這也是不正確的想法，標示班級坐位的有序數對是二維序數的概念。</p> <p>呈線形排列上的物件都有一個序數與之對應，例如排第 5 個，班級坐位的有序數對(7, 5)是由兩組序數組成的，例如第 7 排第 5 個，序數一定是整數，不會是負數，也不會是分數或小數。而平面直角坐標上的有序數對($\frac{2}{3}$、-3)，其中的 $\frac{2}{3}$ 和 -3 不是序數而是位移(和 x 軸與 y 軸的距離)。</p>
--	---

題號	7		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
分年細目	7-n-02：能理解因數、質因數、倍數、公因數、公倍數及互質的概念，並熟練質因數分解的計算方法。		
試題內容	下列何者為 50 質因數分解的標準分解式？ ① $2^3 \times 5$ ② $2^2 \times 5^2$ ③ $2^2 \times 5$ ④ 2×5^2		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.03	0.07	0.00
2	0.07	0.18	0.00
3	0.04	0.12	0.00
4*	0.86	0.62	0.99
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.86	鑑別度	0.37
試題品質分析	(1)本題鑑別度為 0.37，試題品質佳；通過率為 0.86，試題難易度易。 (2)本題正確答案為選項 4，通過率為 86%，顯示近九成的學生已具備將整數改記成質因數分解標準式的能力。 (3)有 7%的學生選擇選項 2(低分組有 18%)，這些學生可能不具備將整數質因數分解的能力；也可能利用短除法求質因數分解的標準分解式時計算發生錯誤。		
教材地位分析	先備的知識： 6-n-01：能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解(質數 < 20，質因數 < 20，被分解數 < 100)。		
	評量重點： 7-n-02：能理解因數、質因數、倍數、公因數、公倍數及互質的概念，並熟練質因數分解的計算方法。		

補救教學
建議

(一)質因數分解的標準分解式：

- (1)質因數從小至大、從左至右排列；
- (2)質因數相同連乘時，以指數方式表示。

下列以 24 為例，說明國小與國中學習呈現方式差異：

國小表示方式： $24=2 \times 2 \times 2 \times 3$ 國小階段只需將其表示為質因數之連乘積。

國中表示方式： $24=2^3 \times 3$ 國中階段則以指數方式呈現。

進行正整數的質因數分解時，位數不宜過多且不應對質因數的順序設限。建議教師可利用國小學過學過的數字分解的樹狀圖為教學引導，引導學生發現短除法為分解樹狀圖的速記法。

例如：求 42 的標準分解式

<p>數字分解樹狀圖</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>42 的質因數分解為 $7 \times 2 \times 3$</p>	<p>短除法</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>故 42 的質因數分解為 $42=7 \times 2 \times 3$， 因此 42 的標準分解為 $2 \times 3 \times 7$</p>
--	--

題號	8		
內容領域	數與量	認知歷程向度	概念理解
分年細目	7-n-04：能認識負數，並能以「正、負」表徵生活中性質相反的量。		
試題內容	<p>下列關於相反數的敘述，何者正確？</p> <p>① 「5 的相反數」比「-5 的相反數」大</p> <p>② 「-10」與「10 的相反數」的和等於 0</p> <p>③ 互為相反數的兩個數相加一定等於 0</p> <p>④ 互為相反數的兩個數相乘一定等於 1</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.06	0.14	0.01
2	0.19	0.36	0.02
3*	0.69	0.34	0.97
4	0.06	0.14	0.01
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.69	鑑別度	0.62
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.62，試題品質良好；通過率為 0.69，試題難易度中偏易。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 3，通過率為 69%，顯示近七成的學生已理解相反數的意義。</p> <p>(3)有 19%的學生選擇選項 2(低分組有 36%)，這些學生可能不理解相反數的意義；也可能看錯題目，誤將 -10 與 10 看成是相同的數。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>6-n-04：能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。</p> <p>評量重點：</p> <p>7-n-04：能認識負數，並能以「正、負」表徵生活中性質相反的量。</p>		
補救教學建議	<p>(一)相反數和倒數都是兩個數之間的關係</p> <p>下面以甲=5，乙=8 為例，說明相反數和倒數的意義</p> <p>(1)相反數：</p> <p>以甲為基準量 0 時，比較量乙=+3</p> <p>以乙為基準量 0 時，比較量甲=-3</p>		

甲和乙互為基準量時，它們的比較量間滿足相反數的關係，
也就是說，甲比乙少 3，可以得到乙比甲多 3。

乙比甲多 3，可以得到甲比乙少 3。

(2)倒數：

以甲為基準量 1 時，比較量乙 = $\frac{8}{5}$

以乙為基準量 1 時，比較量甲 = $\frac{5}{8}$

甲和乙互為基準量時，它們的比較量間滿足倒數的關係，

也就是說，甲是乙的 $\frac{5}{8}$ 倍，可以得到乙是甲的 $\frac{8}{5}$ 倍。

乙是甲的 $\frac{8}{5}$ 倍，可以得到甲是乙的 $\frac{5}{8}$ 倍。

題號	9		
內容領域	數與量	認知歷程向度	問題解決
分年細目	7-n-15：能理解連比、連比例式的意義，並能解決生活中有關連比例的問題。		
試題內容	已知 $x : y : z = 12 : 15 : 14$ ，則 $x : z = ?$ ① 6 : 7 ② 6 : 5 ③ 4 : 5 ④ 3 : 7		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.84	0.63	0.96
2	0.03	0.08	0.00
3	0.08	0.15	0.03
4	0.05	0.14	0.01
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.84	鑑別度	0.33
試題品質分析	(1)本題鑑別度為 0.33，試題品質佳；通過率為 0.84，試題難易度易。 (2)本題正確答案為選項 1，通過率為 84%，顯示八成五的學生已理解連等式的意義。 (3)有 8%的學生選擇選項 3(低分組有 15%)，這些學生可能不理解連等式的意義；也可能誤解題意，算出 $x : y$ 的答案。		
教材地位分析	先備的知識： 6-n-09：能認識比和比值，並解決生活中的問題。 評量重點： 7-n-15：能理解連比、連比例式的意義，並能解決生活中有關連比例的問題。		
補救教學建議	(一)建議教師透過情境引入連比的意義 以三合一咖啡為例，三合一咖啡的配方是牛奶 3 份、糖 2 份、咖啡 5 份。 國小階段已引入兩個數的比，學生可以自行寫出下面三種記法 牛奶：糖 = 3 : 2，牛奶：咖啡 = 3 : 5，糖：咖啡 = 2 : 5 學生很容易類比前面的記法，將三合一咖啡的配方記成 牛奶：糖：咖啡 = 3 : 2 : 5。 教師可以透過相等的比，幫助學生察覺可以透過 牛奶：糖 = 3 : 2，牛奶：咖啡 = 3 : 5，糖：咖啡 = 2 : 5 的關係，導出牛奶：糖：咖啡 = 3 : 2 : 5。		

題號	10		
內容領域	代數	認知歷程向度	程序執行
分年細目	7-a-08：能熟練使用代入消去法與加減消去法求二元一次聯立方程式的解。		
試題內容	聯立方程式 $\begin{cases} 4x-3y=2 \\ -7x+4y=-1 \end{cases}$ 的解 $(x, y)=?$ ① (2, 2) ② (-3, 5) ③ (-1, -2) ④ (-2, -3)		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.07	0.14	0.01
2	0.14	0.33	0.01
3*	0.72	0.37	0.98
4	0.06	0.15	0.00
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.72	鑑別度	0.62
試題品質分析	(1)本題鑑別度為 0.62，試題品質良好；通過率為 0.72，試題難易度中偏易。 (2)本題正確答案為選項 3，通過率為 72%，顯示超過七成的學生已具備解二元一次聯立方程式的能力。 (3)有 14%的學生選擇選項 2(低分組有 33%)，這些學生可能不具備解二元一次聯立方程式的能力；也可能只將(-1, -2)代入 $4x-3y=2$ 等號成立，就認為它是二元一次聯立方程式的解；也可能利用加減消去法解題時計算發生錯誤。		
教材地位分析	先備的知識： 6-a-01：能理解等量公理。 評量重點： 7-a-08：能熟練使用代入消去法與加減消去法求二元一次聯立方程式的解。		
補救教學建議	(一)代入消去法在解二元一次聯立方程式上，應用性較低，主要是因為計算複雜度往往較高。 例如： $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x-5y=8 \end{cases}$ ，利用代入消去法來解題的計算很複雜。然而，代入的方法在後續數學學習中反覆出現，故可儘量安排簡易的數值，讓學生經歷代入的方法，例如：		

$$\begin{cases} y = x \\ 2x + 3y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x + 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

當以 $y = mx + n$ 代入另一式時， m 、 n 以整數為原則，如 $y = \frac{x+1}{2}$

的式子都應避免要求使用代入消去法。

(二) 利用加減消去法求二元一次聯立方程式的解時，等量公理為其先備的知識。

以本題為例，透過① $\times 4 + -3 \times$ ②消去 y 項，就是利用等量公理進行運算。

題號	11		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
分年細目	7-n-11：能理解同底數的相乘或相除的指數律。		
試題內容	算算看， $2^4 \times (2^3)^2 \div 2^5 = ?$ ① 2^4 ② 2^5 ③ 2^{14} ④ 2^{15}		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.19	0.30	0.05
2*	0.61	0.23	0.94
3	0.13	0.31	0.00
4	0.07	0.16	0.01
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.61	鑑別度	0.72
試題品質分析	(1)本題鑑別度為 0.72，試題品質良好；通過率為 0.61，試題難易度適中。 (2)本題正確答案為選項 2，通過率為 61%，顯示超過六成的學生已具備利用乘法或除法指數律解題的能力。 (3)有 19%的學生選擇選項 1(低分組有 30%)，這些學生可能不具備利用乘法指數律 $(a^m)^n = a^{mn}$ 解題的能力。 學生可能的算法如下： $2^4 \times (2^3)^2 \div 2^5 = 2^4 \times 2^6 \div 2^5 = 2^{4+6-5} = 2^5$ (4)有 13%的學生選擇選項 3(低分組有 31%)，這些學生可能不具備利用乘法或除法指數律解題的能力，將所有的指數相加。 學生可能的算法如下： $2^4 \times (2^3)^2 \div 2^5 = 2^{4+3+2+5} = 2^{14}$		
教材地位分析	先備的知識： 5-a-01：能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化心算。 評量重點： 7-n-11：能理解同底數的相乘或相除的指數律。		
補救教學建議	(一)教師可透過「某數連加可簡記為乘法」來類比「某數連乘可簡記為指數」，讓學生知道指數是一種簡記的方法。 例如： $\overbrace{3+3+3+3+3+3}^{6\text{個}3\text{連加}} = 3 \times 6$ ； $\overbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}^{6\text{個}3\text{連乘}} = 3^6$ 。		

(二)教師宜多舉例強調，進行包含指數的式子運算時，若有括號則括號先算，沒有括號時，指數運算優先於四則運算，

$$\text{例如： } -3^2 = -(3^2) = -(3 \times 3) = -9 \text{ ；}$$

$$2 \times 3^4 = 2 \times (3^4) = 2 \times (3 \times 3 \times 3 \times 3) = 162 \text{ ；}$$

$$6 \div 3^4 = 6 \div (3^4) = 6 \div (3 \times 3 \times 3 \times 3) = \frac{2}{27} \text{ ；}$$

$$5 + 3^4 = 5 + (3^4) = 5 + (3 \times 3 \times 3 \times 3) = 86 \text{ 。}$$

題號	12		
內容領域	代數	認知歷程向度	程序執行
分年細目	7-a-04：能以等量公理解一元一次方程式，並做驗算。		
試題內容	解方程式 $2(-3x+5)=1+3x$ ， $x=?$ ① 1 ② -1 ③ $\frac{4}{9}$ ④ $-\frac{4}{9}$		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.61	0.22	0.93
2	0.14	0.26	0.04
3	0.13	0.28	0.03
4	0.11	0.24	0.00
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.61	鑑別度	0.71
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.71，試題品質良好；通過率為 0.61，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 1，通過率為 61%，顯示超過六成的學生已具備利用等量公理解一元一次方程式的能力。</p> <p>(3)有 14%的學生選擇選項 2(低分組有 26%)，這些學生可能在移項時正、負號的轉換發生錯誤。 學生可能的算法如下：$2(-3x+5)=1+3x$ $-6x+10=1+3x$ $-9x=9 \Rightarrow x=-1$</p> <p>(4)有 13%的學生選擇選項 3(低分組有 28%)，這些學生可能在去括號時計算發生錯誤。 學生可能的算法如下：$2(-3x+5)=1+3x$ $-6x+5=1+3x$ $-9x=-4 \Rightarrow x=-\frac{4}{9}$</p> <p>(5)有 11%的學生選擇選項 4(低分組有 24%)，這些學生可能在去括號時計算發生錯誤。 學生可能的算法如下：$2(-3x+5)=1+3x$ $-6x+5=1+3x$ $-9x=4 \Rightarrow x=-\frac{4}{9}$</p>		
教材地位分析	先備的知識： 6-a-01：能理解等量公理。		

	<p>評量重點：</p> <p>7-a-04：能以等量公理解一元一次方程式，並做驗算。</p>
<p>補救教學 建議</p>	<p>(一)可以用沙包、砝碼與天平來表徵一元一次方程式，其中用沙包來標爭未知數 x，因為沙包的重量是確定的，但是在沒有算出或秤出重量之前，並不知道沙包有多重；用 1 公克的砝碼來表徵已知數 1，5 個 1 公克的砝碼可以表徵數字 5；用天平來表徵算式中的等號，透過兩邊一樣重的關係，溝通兩邊的數字一樣大。</p> <p>(二)以解一元一次方程式「$5x+3=3x+7$」為例，教師可以用沙包、砝碼與天平，幫助學生記錄解題過程。</p> <p>先要求學生利用沙包、砝碼與天平，來表示一元一次方程式「$5x+3=3x+7$」，分別畫出天平表示等號，在天平的左端畫出 5 個沙包和 3 個砝碼表示「$5x+3$」；在天平的右端畫出 3 個沙包和 7 個砝碼表示「$3x+7$」，再透過下面三個步驟，幫助學生記錄解題過程。</p> <p>步驟一：在天平兩端同時拿走 3 個砝碼，表示方程式等號兩邊同時減 3，並要求學生把拿走的過程及最後的結果，分別使用算式「$(5x+3)-3=(3x+7)-3$」和「$5x=3x+4$」記錄。</p> <p>步驟二：在天平兩端同時拿走 3 個沙包，表示方程式等號兩邊同時減 $3x$，並要求學生把拿走的過程及最後的結果，分別使用算式「$(5x)-3x=(3x+4)-3x$」和「$2x=4$」記錄。</p> <p>步驟三：最後要求學生把求一個沙包有多重的過程及結果，分別使用算式「$2x\div 2=4\div 2$」和「$x=2$」記錄。得到 $x=2$ 的答案。</p>

題號	13		
內容領域	代數	認知歷程向度	問題解決
分年細目	7-a-14：能理解二元一次聯立方程式解的幾何意義。		
試題內容	直角坐標平面上相異兩條直線 $L_1: 2x + 3y = 5$ 、 $L_2: 3x + y = -3$ 交於一點，則兩直線的交點坐標為何？ ① (1, 1) ② (2, 9) ③ (3, -12) ④ (-2, 3)		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.09	0.17	0.01
2	0.14	0.28	0.02
3	0.14	0.29	0.01
4*	0.64	0.26	0.96
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.64	鑑別度	0.70
試題品質分析	(1)本題鑑別度為 0.70，試題品質良好；通過率為 0.64，試題難易度中偏易。 (2)本題正確答案為選項 4，通過率為 64%，顯示六成五的學生已理解二元一次聯立方程式解的幾何意義。 (3)有 14%的學生選擇選項 2(低分組有 28%)，這些學生可能已理解二元一次聯立方程式解的幾何意義，但在求二元一次聯立方程式解時計算發生錯誤。 學生可能的算法如下： $2x + 3y = 5 \cdots \cdots (1)$ $3x + y = -3 \cdots \cdots (2)$ $(1) - (2) \times 3 \quad 2x - 9x = 5 - (-9)$ $-7x = -14 \Rightarrow x = 2$ $x = 2$ 代入(2) $\Rightarrow y = 9$ (4)有 14%的學生選擇選項 3(低分組有 29%)，這些學生可能已理解二元一次聯立方程式解的幾何意義，但在求二元一次聯立方程式解時計算發生錯誤。		
教材地位分析	先備的知識： 7-a-13：能在直角坐標平面上描繪二元一次方程式的圖形。 評量重點： 7-a-14：能理解二元一次聯立方程式解的幾何意義。		
補救教學	(一)學生雖然會畫出二元一次方程式的圖形，但對於「圖形上的點		

建議	<p>為方程式的解」或是「圖形上的任何一點會代入方程式會使方程式成立」之觀念較為薄弱。可先請學生利用二元一次方程式的部份解轉成如同點坐標的數對，再將這些數點描繪到坐標平面上讓學生發現：(1)這些點都會落在一條直線上；(2)這條直線上的其他點當轉成 x 與 y 的解時，也可以滿足給定的二元一次方程式。例如：請學生坐標平面上畫出 $x+y=5$ 的圖形時，先找到一些整數解，像是 $(x, y) = (0, 5)$、$(1, 4)$、$(2, 3)$、$(3, 2)$、$(4, 1)$、$(5, 0)$，可落在一條直線上，再請同學觀察這些直線的其他點轉成 x 與 y 的解時，是否可以代入方程式會使方程式成立；或是找到這條直線以外的某些點，驗證這些點所轉換的數對，代入方程式後無法使方程式成立。</p>
----	--

$-(a-b)=0-(a-b)=0-a+b=-a+b$ 。藉此銜接

$a-(b+c)=a-b-c$ 、 $a-(b-c)=a-b+c$ 的教學。

(二)下面說明如何幫助學生理解 $a-(b+c)=a-b-c$

(1)甲有80元，給乙10元，給丙20元，還剩下多少元？

可以有兩種不同的解法：

解法一： $80-10-20=50$

解法二： $80-(10+20)=50$

可以得到 $80-(10+20)=80-10-20$

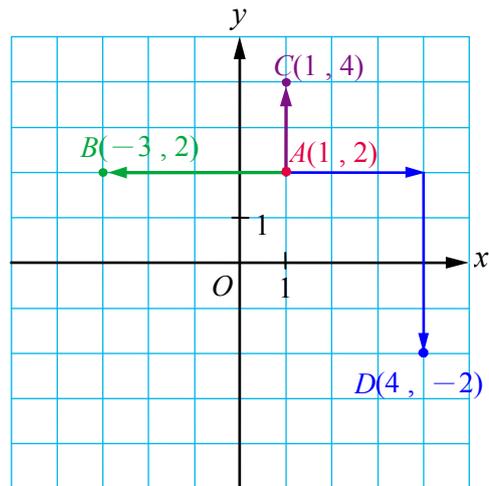
(2)有兩個理解「 $80-(10+20)=80-10-20$ 」的層次

層次一：必須算出這兩個算式的答案，發現這兩個算式的答案相同，可以記成 $80-(10+20)=80-10-20$ 。

層次二：它們是同一個問題的兩種合理算法，因此不必算出答案，就知道它們一定相等，可以記成 $80-(10+20)=80-10-20$ 。

(3)因為學生算不出 $a-(b+c)$ 和 $a-b-c$ 的答案，因此學生必須達到層次二，教師才能幫助學生將 $80-(10+20)=80-10-20$ 改記成 $a-(b+c)=a-b-c$ 。

題號	15		
內容領域	代數	認知歷程向度	程序執行
分年細目	7-a-11：能理解平面直角坐標系。		
試題內容	<p>在坐標平面上，若 S 點向上移動 5 個單位，再向右移動 6 個單位就到達原點，則 S 點的坐標為何？</p> <p>① (5, -6) ② (-5, -6) ③ (-6, -5) ④ (6, -5)</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.12	0.30	0.00
2	0.17	0.26	0.07
3*	0.60	0.21	0.91
4	0.11	0.22	0.01
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.60	鑑別度	0.70
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.70，試題品質良好；通過率為 0.60，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 3，通過率為 60%，顯示超過六成的學生已理解平面直角坐標系。</p> <p>(3)有 12%的學生選擇選項 1(低分組有 30%)，有 17%的學生選擇選項 2(低分組有 26%)，這些學生可能混淆 x 坐標和 y 坐標的位置，也混淆向上(下)移動或向右(左)移動坐標的正負號。</p> <p>(5)有 11%的學生選擇選項 4(低分組有 22%)，這些學生可能混淆向上(下)移動或向右(左)移動坐標的正負號。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>6-d-02：能整理生活中的有序資料，並繪製成折線圖。</p> <p>評量重點：</p> <p>7-a-11：能理解平面直角坐標系。</p>		
補救教學建議	<p>(一)複習坐標平面上點的坐標表示法。</p> <p>(二)練習從某點上下左右移動後，到達不同位置的坐標表示法，如下圖：</p>		



(1) 從 $A(1, 2)$ 向左移動 4 個單位，到達 B 。

向左移動 4 個單位， x 坐標變成 $1 - 4 = -3$ ，而 y 坐標沒有改變，所以 B 點的坐標為 $(-3, 2)$ 。

(2) 從 $A(1, 2)$ 向上移動 2 個單位後，到達 C 。

向上移動 2 個單位， y 坐標變成 $2 + 2 = 4$ ，而 x 坐標沒有改變，所以 C 點的坐標為 $(1, 4)$ 。

(3) 從 $A(1, 2)$ 向右移動 3 個單位，再向下移動 4 個單位後，到達 D 。

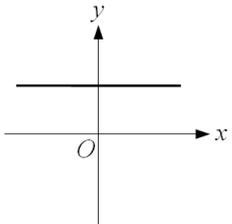
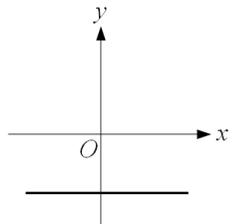
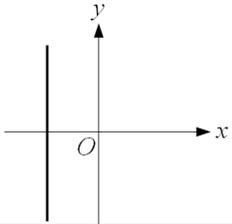
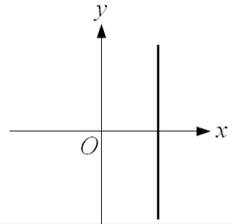
向右移動 3 個單位： x 坐標變為 $1 + 3 = 4$ ，

向下移動 4 個單位： y 坐標變為 $2 - 4 = -2$ ，

所以 D 點的坐標為 $(4, -2)$ 。

題號	16		
內容領域	數與量	認知歷程向度	概念理解
分年細目	7-n-04：能認識負數，並能以「正、負」表徵生活中性質相反的量。		
試題內容	<p>已知甲=a，甲比乙多2，請問乙=？</p> <p>已知丙=b，丙是丁的2倍，請問丁=？</p> <p>請問下列敘述何者正確？</p> <p>① $乙=a-2, 丁=-\frac{b}{2}$ ② $乙=a-2, 丁=2b$</p> <p>③ $乙=a+2, 丁=\frac{b}{2}$ ④ $乙=a+2, 丁=2b$</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.57	0.23	0.90
2	0.15	0.27	0.03
3	0.13	0.22	0.05
4	0.15	0.28	0.02
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.57	鑑別度	0.66
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為0.66，試題品質良好；通過率為0.57，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項1，通過率為57%，顯示近六成的學生已理解相反數和倒數的意義。</p> <p>(3)有15%的學生選擇選項2(低分組有27%)，這些學生理解相反數的意義，知道甲比乙多2時，乙會比甲少2，但是不理解倒數的意義，誤認為丙是丁的2倍，丁也是丙的2倍。</p> <p>(4)有13%的學生選擇選項3(低分組有22%)，這些學生不理解相反數的意義，誤認為甲比乙多2時，乙也會比甲多2。</p> <p>(5)有15%的學生選擇選項4(低分組有28%)，這些學生不理解倒數的意義，誤認為丙是丁的2倍，丁也是丙的2倍。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>6-n-13：能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性。。</p> <p>評量重點：</p> <p>7-n-04：能認識負數，並能以「正、負」表徵生活中性質相反的量。</p>		
補救教學	(一)相反數和倒數都是兩個數之間的關係		

建議	<p>下面以甲=5，乙=8 為例，說明相反數和倒數的意義</p> <p>(1)相反數：</p> <p>以甲為基準量 0 時，比較量乙 = +3</p> <p>以乙為基準量 0 時，比較量甲 = -3</p> <p>甲和乙互為基準量時，它們的比較量間滿足相反數的關係， 也就是說，甲比乙少 3，可以得到乙比甲多 3 乙比甲多 3，可以得到甲比乙少 3</p> <p>(2)倒數：</p> <p>以甲為基準量 1 時，比較量乙 = $\frac{8}{5}$</p> <p>以乙為基準量 1 時，比較量甲 = $\frac{5}{8}$</p> <p>甲和乙互為基準量時，它們的比較量間滿足倒數的關係， 也就是說，甲是乙的 $\frac{5}{8}$ 倍，可以得到乙是甲的 $\frac{8}{5}$ 倍 乙是甲的 $\frac{8}{5}$ 倍，可以得到甲是乙的 $\frac{5}{8}$ 倍</p>
----	--

題號	17		
內容領域	代數	認知歷程向度	概念理解
分年細目	7-a-13：能在直角坐標平面上描繪二元一次方程式的圖形。		
試題內容	<p>下列何者可能是二元一次方程式 $0x+3y=-5$ 的圖形？</p> <p>① ②</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;">   </div> <p>③ ④</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;">   </div>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.19	0.32	0.03
2*	0.58	0.25	0.93
3	0.14	0.25	0.04
4	0.09	0.18	0.01
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.58	鑑別度	0.68
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.68，試題品質良好；通過率為 0.58，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 2，通過率為 58%，顯示近六成的學生已能在直角坐標平面上描繪二元一次方程式的圖形。</p> <p>(3)有 19%的學生選擇選項 1(低分組有 33%)，這些學生可能會在直角坐標平面上畫出 $0x+by=k(b\neq 0)$的圖形，但是在求 y 截距時計算發生錯誤。</p> <p>(4)有 14%的學生選擇選項 3(低分組有 25%)，這些學生可能混淆 $0x+by=k(b\neq 0)$和 $ax+0y=k(a\neq 0)$圖形的意義，誤認為 $0x+by=k(b\neq 0)$的圖形是與 y 軸平行的直線。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>7-a-11：能理解平面直角坐標系。</p>		

	<p>評量重點：</p> <p>7-a-13：能在直角坐標平面上描繪二元一次方程式的圖形。</p>
<p>補救教學 建議</p>	<p>(一)學生雖然會畫出二元一次方程式的圖形，但對於「圖形上的點為方程式的解」或是「圖形上的任何一點會代入方程式會使方程式成立」之觀念較為薄弱。可先請學生利用二元一次方程式的部份解轉成如同點坐標的數對，再將這些數點描繪到坐標平面上讓學生發現：(1)這些點都會落在一條直線上；(2)這條直線上的其他點當轉成x與y的解時，也可以滿足給定的二元一次方程式。例如：請學生坐標平面上畫出$x+y=5$的圖形時，先找到一些整數解，像是$(x, y) = (0, 5)$、$(1, 4)$、$(2, 3)$、$(3, 2)$、$(4, 1)$、$(5, 0)$，可落在一條直線上，再請同學觀察這些直線的其他點轉成x與y的解時，是否可以代入方程式會使方程式成立；或是找到這條直線以外的某些點，驗證這些點所轉換的數對，代入方程式後無法使方程式成立。</p> <p>(二)學生學習列出二元一次方程式的時候，教師應幫助學生將只有一個未知數的方程式像是$x=5$或$y=5$視為$x+0y=5$或$0x+y=5$的簡記，若遇到化簡後形如為$x=k$(常數)或$y=k$(常數)的圖形問題，同學應可以與二元一次方程式的標準式$ax+by=c$作連結，將$x=k$改為$x+0y=k$或將$y=k$改為$0x+y=k$，如此便可得到$x+0y=k$的圖形為通過$(k, 0)$、$(k, 1)$、$(k, 2)$...的垂直線；同理也可得到$0x+y=k$的圖形為通過$(0, k)$、$(1, k)$、$(2, k)$...的水平線。最後讓同學發現$x=0$在表為$x+0y=0$之後，可視為通過$(0, 0)$的垂直線(即y軸)；而$y=0$在表為$0x+y=0$之後，可視為通過$(0, 0)$的水平線(即x軸)。</p>

題號	18		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
分年細目	7-n-13：能理解比、比例式、正比、反比的意義，並能解決生活中有關比例的問題。		
試題內容	若 $(5-x):(x+3)=(-2):11$ ，則 $x=?$ ① 3 ② 8 ③ $-\frac{43}{9}$ ④ $\frac{61}{9}$		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.07	0.15	0.00
2	0.21	0.38	0.04
3	0.14	0.27	0.02
4*	0.58	0.19	0.94
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.58	鑑別度	0.75
試題品質分析	(1)本題鑑別度為 0.75，試題品質良好；通過率為 0.58，試題難易度適中。 (2)本題正確答案為選項 4，通過率為 58%，顯示近六成的學生已具備利用「內項乘積等於外項乘積」性質解題的能力。 (3)有 21%的學生選擇選項 2(低分組有 38%)，這些學生可能不理解比的意義。 學生可能的算法如下： $x+3=11 \Rightarrow x=8$ (4)有 14%的學生選擇選項 3(低分組有 27%)，這些學生可能理解比的意義，但誤記「內項乘積等於外項乘積」的性質為「前項乘積等於後項乘積」。 學生可能的算法如下： $(-2)(5-x)=11(x+3) \Rightarrow x=-\frac{43}{9}$		
教材地位分析	先備的知識： 6-n-09：能認識比和比值，並解決生活中的問題。 評量重點： 7-n-13：能理解比、比例式、正比、反比的意義，並能解決生活中有關比例的問題。		
補救教學建議	(一)下面說明如何幫助學生理解「內項乘積等於外項乘積」。 (1) $3:y=8:5$ $\Rightarrow 3 \times 8 : y \times 8 = 8 \times 3 : 5 \times 3$ $\Rightarrow y \times 8 = 5 \times 3$		

$$\Rightarrow y = \frac{5 \times 3}{8}$$

y 是內項時 $\Rightarrow y = \text{外} \times \text{外} \div \text{內}$ 。

$$(2) \quad y : 7 = 4 : 5$$

$$\Rightarrow y \times 5 : 7 \times 5 = 4 \times 7 : 5 \times 7$$

$$\Rightarrow y \times 5 = 4 \times 7$$

$$\Rightarrow y = \frac{4 \times 7}{5}$$

y 是外項時 $\Rightarrow y = \text{內} \times \text{內} \div \text{外}$ 。

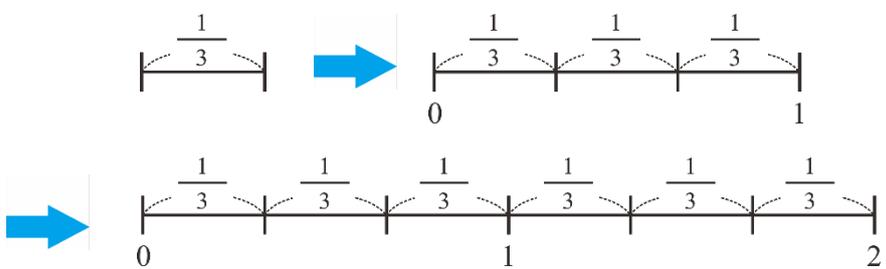
(3) 因為「 $y \times 8 = 5 \times 3$ 」和「 $y \times 8 = 5 \times 3$ 」很容易算出 y 的答案，因此不須要記上面未知數在內項(1)和(2)未知數在外項兩個公式，

$$3 : y = 8 : 5 \quad \Rightarrow \quad y \times 8 = 5 \times 3$$

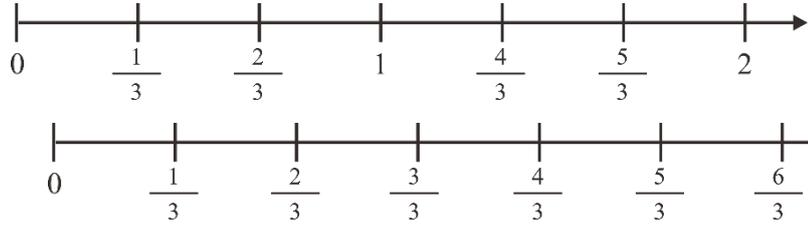
$$y : 7 = 4 : 5 \quad \Rightarrow \quad y \times 5 = 4 \times 7$$

直接記憶「內項乘內項 = 外項乘外項」即可。

題號	19		
內容領域	數與量	認知歷程向度	概念理解
分年細目	7-n-08：能理解數線，數線上兩點的距離公式，及能藉數線上數的位置驗證數的大小關係。		
試題內容	<p>甲說：$9-1\frac{1}{4}=9-1-\frac{1}{4}$</p> <p>乙說：$9-1\frac{1}{4}=9-1+\frac{1}{4}$</p> <p>丙說：數線上，$-1\frac{1}{4}$和0的距離是「$-1+\frac{1}{4}$」</p> <p>丁說：數線上，$-1\frac{1}{4}$和0的距離是「$-1-\frac{1}{4}$」</p> <p>請問哪些人的說法正確？</p> <p>① 甲和丙 ② 甲和丁 ③ 乙和丙 ④ 乙和丁</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.15	0.21	0.05
2	0.51	0.28	0.87
3	0.21	0.37	0.02
4	0.13	0.14	0.06
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	（送分）	鑑別度	（送分）
試題品質分析	<p>(1)本題將絕對值的符號誤印成引號，但是題幹描述數線上，$-1\frac{1}{4}$和0的距離是「$-1+\frac{1}{4}$」，因此雖然本題不計分，但是多數學生應該理解要計算的是這兩個數的絕對值。</p> <p>(2)由已知的數據，可以知道本題鑑別度為0.59，試題品質良好；通過率為0.52，試題難易度適中。</p> <p>(3)本題正確答案為選項2，由數據顯示本題通過率為51%，顯示超過五成的學生已數掌握線上兩點的距離公式，並具備負分數計算的能力。</p> <p>(4)有15%的學生選擇選項1(低分組有21%)，這些學生可能知道$9-1\frac{1}{4}=9-(1+\frac{1}{4})=9-1-\frac{1}{4}$，但是無法掌握兩點的距離公式，誤以為$-1\frac{1}{4}$和0的距離是$-1\frac{1}{4}-0 = -1+\frac{1}{4}$。</p>		

	<p>(5)有 21%的學生選擇選項 3(低分組有 37%)，這些學生可能無掌握負帶分數的意義，誤以為 $9-1\frac{1}{4}=9-1+\frac{1}{4}$，也無法掌握兩點的距離公式，誤以為 $-1\frac{1}{4}$ 和 0 的距離是 $-1\frac{1}{4}-0 = -1+\frac{1}{4}$。</p>
<p>教材地位 分析</p>	<p>先備的知識： 5-n-13：能將分數、小數標記在數線上。。</p> <p>評量重點： 7-n-08：能理解數線，數線上兩點的距離公式，及能藉數線上數的位置驗證數的大小關係。</p>
<p>補救教學 建議</p>	<p>(一)國小階段討論的對象是全數(自然數和0的聯集)，0是沒有的意思，例如0個蘋果指的是沒有蘋果；國中階段討論的對象是整數，0並不是沒有，而是基準上的定位，例如攝氏0度並不是沒有溫度，而是水結冰的溫度。 建議教師引入含負數的數線時，先溝通整數數線上原點 0 的意義。</p> <p>(二)先幫助學生引入正數的分數數線，再幫助學生引入負數的分數數線。</p> <p>(1)引入正數的分數數線 教師可以透過下列方法繪製分數數線，幫助學生認識分數數線：透過單位分數的累積，例如畫出 3 個 $\frac{1}{3}$ 為 1 單位，6 個 $\frac{1}{3}$ 為 2 單位等方式繪製分數數線，幫助學生認識分數數線。如下所示：</p> <p>累積 3 個 $\frac{1}{3}$，可以合成 1；累積 6 個 $\frac{1}{3}$，可以合成 2。</p>  <p>建議教師<u>不宜</u>透過將 1 單位分割成 3 等份的方式製作分數數線，學生沒有將單位長度 1 分割成 3 等份的能力，且這樣的分割方式很難恰好精確。</p>

再將分數標記在數線上。



(1) 引入負數的分數數線

教師可以類比引入正數分數數線的方式引入負數的分數數線

以在數線上畫出 $2\frac{2}{5}$ 為例，教師應先說明 $2\frac{2}{5} = 2 + \frac{2}{5}$ ，因

此

$2\frac{2}{5}$ 和原點的距離是 $2 + \frac{2}{5}$ 。

再以在數線上畫出 $-2\frac{2}{5}$ 為例，教師應先說明 $-2\frac{2}{5} = -2 + \frac{-2}{5}$

，因此 $-2\frac{2}{5}$ 和原點的距離是 $|(-2) + (\frac{-2}{5})| = 2 + \frac{2}{5}$ 。

也就是說， $2\frac{2}{5}$ 和 $-2\frac{2}{5}$ 和原點的距離相同，都是 $2 + \frac{2}{5}$ 。

題號	20		
內容領域	數與量	認知歷程向度	概念理解
分年細目	7-n-13：能理解比、比例式、正比、反比的意義，並能解決生活中有關比例的問題。		
試題內容	<p>已知 $3a=7b$，請問下列敘述何者<u>錯誤</u>？</p> <p>① a 是 b 的 $\frac{7}{3}$ 倍</p> <p>② $a:b=7:3$</p> <p>③ a 的 7 倍和 b 的 3 倍一樣大</p> <p>④ a : b 的比值是 $\frac{7}{3}$</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.21	0.25	0.08
2	0.10	0.19	0.01
3*	0.58	0.33	0.89
4	0.11	0.22	0.01
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.58	鑑別度	0.56
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.56，試題品質良好；通過率為 0.58，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 3，通過率為 58%，顯示近六成的學生已掌握比、比值和基準量與比較量倍數間的關係。</p> <p>(3)有 21%的學生選擇選項 1(低分組有 25%)，這些學生誤認為 $3a=7b$ 時，$a=3$、$b=7$，所以 a 是 b 的 $\frac{3}{7}$ 倍。</p> <p>(4)有 10%的學生選擇選項 2(低分組有 19%)，這些學生誤認為 $3a=7b$ 時，$a:b=3:7$。</p> <p>(5)有 11%的學生選擇選項 4(低分組有 22%)，這些學生誤認為 $3a=7b$ 時，$a:b=3:7$，$3\div 7=\frac{3}{7}$，所以 a : b 的比值是 $\frac{3}{7}$。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>6-n-09：能認識比和比值，並解決生活中的問題。</p> <p>評量重點：</p> <p>7-n-13：能理解比、比例式、正比、反比的意義，並能解決生活中有關比例的問題。</p>		

補救教學
建議

(一)以甲=8、乙=5為例，有二種溝通「乙：甲的比值」的方法。

(1)乙：甲 $=5:8=\frac{5}{8}:1$ ，因為數學上將基準量都看成1，因此

可以將基準量1省略不記，只記比較量 $\frac{5}{8}$ ，並稱 $5:8=\frac{5}{8}:1$

中的比較量 $\frac{5}{8}$ 為5:8的比值。

$a:b=\frac{a}{b}:1=\frac{a}{b}$ ，稱a:b的比值是 $\frac{a}{b}$ 。

(2)乙：甲 $=5:8=5\div 8=\frac{5}{8}$ ，5÷8指的是將基準量甲看成1時，

比較量乙會是 $\frac{5}{8}$ ，並稱乙：甲 $=5:8=5\div 8=\frac{5}{8}$ 中的比較量 $\frac{5}{8}$ 為5:8的比值。

$a:b=a\div b=\frac{a}{b}$ ，稱a:b的比值是 $\frac{a}{b}$ 。

(二)乙：甲 $=5:8=\frac{5}{8}:1$ ，可以得到下面兩個關係

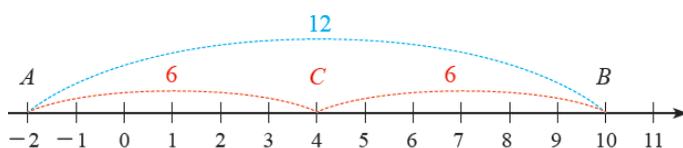
(1)乙：甲的比值為 $\frac{5}{8}$

(2)甲是基準量1，乙是比較量 $\frac{5}{8}$ ，稱乙是甲的 $\frac{5}{8}$ 倍。

題號	21		
內容領域	數與量	認知歷程向度	概念理解
分年細目	7-n-08：能理解數線，數線上兩點的距離公式，及能藉數線上數的位置驗證數的大小關係。		
試題內容	已知 P 點坐標為 2，P、Q 兩點的中點坐標為 -2，請問 Q 點坐標為何？ ① 4 ② 0 ③ -4 ④ -6		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.08	0.15	0.02
2	0.18	0.28	0.05
3	0.32	0.43	0.11
4*	0.42	0.13	0.83
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.42	鑑別度	0.70
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.70，試題品質尚可；通過率為 0.42，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 4，通過率為 42%，顯示超過四成的學生已具備利用中點坐標公式解題的能力。</p> <p>(3)有 18%的學生選擇選項 2(低分組有 28%)，這些學生可能混淆兩點距離公式和兩點中點坐標的意義，直接將題目給定的 2 個數字相加。學生可能的算法：$(-2) + = 0$。</p> <p>(4)有 31%的學生選擇選項 3(低分組有 43%)，這些學生可能混淆兩點距離公式和兩點中點坐標的意義，直接將題目給定的 2 個數字相減。學生可能的算法：$(-2) - 2 = -4$。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>5-n-13：能將分數、小數標記在數線上。</p> <p>評量重點：</p> <p>7-n-08：能理解數線，數線上兩點的距離公式，及能藉數線上數的位置驗證數的大小關係。</p>		

補救教學
建議

(一)針對「數線上兩點的中點坐標」，本基本學習內容之教學活動應以數字實例結合數線輔助說明在數線上與某兩點距離相等的點代表此兩點的中點。例如：數線上兩點A(-2)及B(10)， $\overline{AB} = 10 - (-2) = 12$ ，設A和B的中點為C，因為 $\overline{AC} = \overline{BC} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} = 6$ ，所以中點C的坐標可由A點右移6單位 $(-2 + 6 = 4)$ 或由B點左移6單位 $(10 - 6 = 4)$ 得到中點C(4)。



題號	22		
內容領域	數與量	認知歷程向度	概念理解
分年細目	7-n-08：能理解數線，數線上兩點的距離公式，及能藉數線上數的位置驗證數的大小關係。		
試題內容	<p>甲說：$A(-1\frac{1}{4})$，$B(1\frac{1}{4})$兩點的距離為$2\frac{1}{2}$。</p> <p>乙說：$A(-1\frac{1}{4})$，$B(-2\frac{1}{4})$兩點的距離為1。</p> <p>請問誰的說法正確？</p> <p>① 只有甲 ② 只有乙 ③ 兩人都正確 ④ 兩人都不正確</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.17	0.21	0.11
2	0.29	0.36	0.11
3*	0.39	0.16	0.77
4	0.14	0.26	0.01
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.39	鑑別度	0.61
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為0.61，試題品質良好；通過率為0.39，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項3，通過率為39%，顯示四成的學生已具備利用數線上兩點距離公式解題的能力。</p> <p>(3)有29%的學生選擇選項2(低分組有36%)，有17%的學生選擇選項1(低分組有21%)，有14%的學生選擇選項4(低分組有26%)，這些學生可能不具備利用數線上兩點距離公式解題的能力；也可能已具備利用數線上兩點距離公式解題的能力，但在帶分數減法計算時發生錯誤。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>5-n-13：能將分數、小數標記在數線上。。</p>		

評量重點：

7-n-08：能理解數線，數線上兩點的距離公式，及能藉數線上數的位置驗證數的大小關係。

(一) 國小階段討論的對象是全數(自然數和0的聯集)，0是沒有的意思，例如0個蘋果指的是沒有蘋果；國中階段討論的對象是整數，0並不是沒有，而是基準上的定位，例如攝氏0度並不是沒有溫度，而是水結冰的溫度。

建議教師引入含負數的數線時，先溝通整數數線上原點0的意義。

(二) 先幫助學生引入正數的分數數線，再幫助學生引入負數的分數數線。

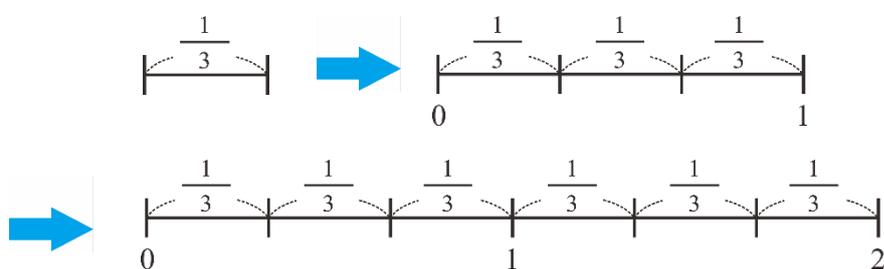
(1) 引入正數的分數數線

教師可以透過下列方法繪製分數數線，幫助學生認識分數數線：

透過單位分數的累積，例如畫出3個 $\frac{1}{3}$ 為1單位，6個 $\frac{1}{3}$ 為2

單位等方式繪製分數數線，幫助學生認識分數數線。如下所示：

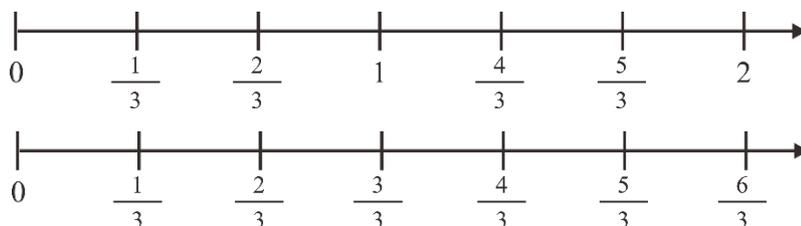
累積3個 $\frac{1}{3}$ ，可以合成1；累積6個 $\frac{1}{3}$ ，可以合成2。



補救
教學
建議

建議教師不宜透過將1單位分割成3等份的方式製作分數數線，學生沒有將單位長度1分割成3等份的能力，且這樣的分割方式很難恰好精確。

再將分數標記在數線上。



(1) 引入負數的分數數線

教師可以類比引入正數分數數線的方式引入負數的分數數線

以在數線上畫出 $2\frac{2}{5}$ 為例，教師應先說明 $2\frac{2}{5}=2+\frac{2}{5}$ ，因此

$2\frac{2}{5}$ 和原點的距離是 $2+\frac{2}{5}$ 。

再以在數線上畫出 $-2\frac{2}{5}$ 為例，教師應先說明 $-2\frac{2}{5}=-2+\frac{-2}{5}$ ，

因此 $-2\frac{2}{5}$ 和原點的距離是 $|(-2)+(\frac{-2}{5})|=2+\frac{2}{5}$ 。

也就是說， $2\frac{2}{5}$ 和 $-2\frac{2}{5}$ 和原點的距離相同，都是 $2+\frac{2}{5}$ 。

題號	23		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
分年細目	7-n-05：能認識絕對值，並能利用絕對值比較負數的大小。		
試題內容	算算看， $ 3+(-9)-(-1)\times 2 =?$ ① 4 ② 8 ③ 10 ④ -4		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.46	0.19	0.74
2	0.13	0.24	0.02
3	0.20	0.35	0.04
4	0.21	0.22	0.20
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.46	鑑別度	0.55
試題品質分析	(1)本題鑑別度為 0.55，試題品質良好；通過率為 0.46，試題難易度適中。 (2)本題正確答案為選項 1，通過率為 46%，顯示近五成的學生已認識絕對值。 (3)有 13%的學生選擇選項 2(低分組有 24%)，這些學生可能已認識絕對值，但在計算時發生錯誤。 學生可能的算法如下： $ 3+(-9)-(-1)\times 2 = 3+(-9)-2 = -8 = 8$ 。 (4)有 20%的學生選擇選項 3(低分組有 35%)，這些學生可能已認識絕對值，但在計算時發生錯誤。 學生可能的算法如下： $ 3+(-9)-(-1)\times 2 = 3+9-2 = 10 = 10$ 。 (5)有 21%的學生選擇選項 4(低分組有 22%)，這些學生可能不認識絕對值。 學生可能的算法如下： $ 3+(-9)-(-1)\times 2 = -4 = -4$ 。		
教材地位分析	先備的知識： 5-n-13：能將分數、小數標記在數線上。 評量重點： 7-n-05：能認識絕對值，並能利用絕對值比較負數的大小。		
補救教學建議	(一)國小階段討論的對象是全數(自然數和0的聯集)，0是沒有的意思，例如0個蘋果指的是沒有蘋果；國中階段討論的對象是整數，0並不是沒有，而是基準上的定位，例如攝氏0度並不是沒有溫度，而是水結冰的溫度。		

	<p>建議教師引入含負數的數線時，先溝通整數數線上原點 0 的意義。</p> <p>(二)建議教師先引入兩點的距離公式，再將兩點的距離公式改記成絕對值，例如 $-1-4$ 指的是-1 和 4 這兩點的距離。</p> <p>$-4 = -4-0$，-4 指的是 0 和-4 這兩點的距離。</p>
--	--

題號	24		
內容領域	數與量	認知歷程向度	問題解決
分年細目	7-n-07：能熟練數的運算規則。		
試題內容	<p>已知「$23.57 \times 247 = 5821.79$」，$甲 = 13.57 \times 247$，$乙 = 23.57 \times 147$。</p> <p>請問甲和乙兩數相差多少？</p> <p>① 10 ② 11.3 ③ 21.79 ④ 113</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.21	0.25	0.07
2	0.13	0.22	0.04
3	0.17	0.27	0.07
4*	0.48	0.25	0.82
未作答	0.01	0.00	0.00
通過率	0.48	鑑別度	0.57
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.57，試題品質良好；通過率為 0.48，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 4，通過率為 48%，顯示近五成的學生已具備利用乘法對加法的分配律簡化計算的能力。</p> <p>(3)有 21%的學生選擇選項 1(低分組有 25%)，這些學生可能不具備利用乘法對加法的分配律簡化計算的能力；也可能誤解題意，任意選擇兩數相減。 學生可能的算法如下：$23.57 - 13.57 = 10$。</p> <p>(4)有 13%的學生選擇選項 2(低分組有 22%)，這些學生可能具備利用乘法對加法的分配律簡化計算的能力，但在計算時發生錯誤。 學生可能的算法如下： $23.57 \times 247 = 13.57 \times 247 + 10 \times 247$ $\Rightarrow 甲 = 23.57 \times 247 - 10 \times 247$ $23.57 \times 247 = 23.57 \times 147 + 23.57 \times 100$ $\Rightarrow 乙 = 23.57 \times 247 - 23.57 \times 100$ $乙 - 甲 = (23.57 \times 247 - 23.57 \times 100) - (23.57 \times 247 - 10 \times 247)$ $= 247 - 235.7 = 11.3$ </p> <p>(5)有 17%的學生選擇選項 3(低分組有 27%)，這些學生可能不具備利用乘法對加法的分配律簡化計算的能力。 學生可能的算法如下：$5821.79 - 5800 = 21.79$</p>		

教材地位 分析	<p>先備的知識：</p> <p>5-a-01：能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化心算。</p> <p>評量重點：</p> <p>7-n-07：能熟練數的運算規則。</p>
補救教學 建議	<p>(一)乘法對加法的分配律是一種關係，指的是同一個先加後乘(或連乘兩次再加)的多步驟問題情境，一定有兩種算法，這兩種算法的答案一定相等。</p> <p>下面以「豆漿一杯 20 元，乳酪蛋餅一個 40 元，媽媽買了 6 杯豆漿、6 個蛋餅，請問要付多少元？」為例，說明認識乘法對加法的分配律的兩個層次：</p> <p>層次一：學生必須分別算出這兩種算法的答案，才能看到這兩種算法的答案相同。</p> <p>學生必須算出 $(20+40)\times 6=360$ 和 $20\times 6+40\times 6=360$ 的答案，發現這兩種算法的答案相同，可以得到「$(20+40)\times 6=20\times 6+40\times 6$」，也可以得到「$20\times 6+40\times 6=(20+40)\times 6$」。</p> <p>層次二：學生不必算這兩種算法的答案，就能預期兩種算法的答案一定相同。</p> <p>因為這兩種算法都是算出「豆漿一杯 20 元，乳酪蛋餅一個 40 元，媽媽買了 6 杯豆漿、6 個蛋餅，請問要付多少元？」的正確算法，學生不必算出答案，就知道 $(20+40)\times 6$ 和 $20\times 6+40\times 6$ 的答案一定相等，可以記成「$(20+40)\times 6=20\times 6+40\times 6$」，也可以記成「$20\times 6+40\times 6=(20+40)\times 6$」。</p> <p>教師應先幫助層次一的學生提升至層次二，再幫助層次二的學生，將數字情境「$(20+40)\times 6=20\times 6+40\times 6$」和「$20\times 6+40\times 6=(20+40)\times 6$」改記成未知數情境「$(a+b)\times c=axb+axc$」和「$axb+axc=(a+b)\times c$」。</p>

題號	25		
內容領域	代數	認知歷程向度	問題解決
分年細目	7-a-04：能以等量公理解一元一次方程式，並做驗算。		
試題內容	<p>「0,2」這兩個數中，哪個數是方程式 $3x+5=2(x-2)+x+9$ 的解？</p> <p>① 只有 0 ② 只有 2 ③ 兩個數都是 ④ 兩個數都不是</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.25	0.19	0.18
2	0.19	0.35	0.05
3*	0.38	0.20	0.72
4	0.18	0.25	0.05
未作答	0.01	0.00	0.00
通過率	0.38	鑑別度	0.52
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.52，試題品質良好；通過率為 0.38，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 3，通過率為 38%，顯示近四成的學生已具備利用等量公理解一元一次方程式並做驗算的能力。</p> <p>(3)有 25%的學生選擇選項 1(低分組有 19%)，這些學生可能利用等量公理將一元一次方程式化簡成 $0x=0$ 後，誤認為只有 0 是 $0x=0$ 的解；也可能將 0 代入原方程式成立，就認為 0 是該方程式的解。</p> <p>(4)有 19%的學生選擇選項 2(低分組有 35%)，這些學生可能不具備利用等量公理解一元一次方程式的能力；也可能將 2 代入原方程式成立，就認為 2 是該方程式的解。</p> <p>(5)有 18%的學生選擇選項 4(低分組有 25%)，這些學生可能利用等量公理將一元一次方程式化簡成 $0x=0$ 後，誤認為 $0x=0$ 無解。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>5-n-04：能理解因數和倍數。</p> <p>評量重點：</p> <p>7-a-04：能以等量公理解一元一次方程式，並做驗算。</p>		
補救教學建議	<p>(一)依題意列出一元一次方程式後，例如列出 $3x+5=x-6$、$2x+11=0$、$\frac{3x+5}{2}=\frac{x-2}{4}$ 等，必須將方程式化簡為 $ax+b=0$ 或 $ax=b$ 之基本型式(標準式)，才能求出方程式的解。</p>		

$ax+b=0$ 的解為 $x=\frac{-b}{a}$ ， $ax=b$ 的解為 $x=\frac{b}{a}$ ($a\neq 0$)

(二) $3x+2=3x+1$ 化簡後得到 $0x=-1$ ， x 以任意數代入都不成立，

因此，一元一次方程式 $3x+2=3x+1$ 無解。

也就是說， $ax=b$ 中 $a=0$ 而 $b\neq 0$ 時，方程式無解。

$3x+2=3x+2$ 化簡後得到 $0x=0$ ， x 以任意數代入都成立，

因此，一元一次方程式 $3x+2=3x+2$ 有無限多組解。

也就是說， $ax=b$ 中 $a=0$ 而 $b=0$ 時，方程式有無限多組解。

題號	26		
內容領域	代數	認知歷程向度	問題解決
分年細目	7-a-01：能熟練符號的意義，及其代數運算。		
試題內容	<p>有一個四位數字 $xyzw$，x、y、z、w 是 0 到 9 的整數，$x \neq 0$，</p> <p>甲 $= x + y + z + w$，</p> <p>乙 $= 1000x + 100y + 10z + w$，</p> <p>丙 $= (10x + y) \times 100 + 10z + w$，</p> <p>丁 $= 1000x + (10y + z) \times 10 + w$，</p> <p>請問哪些算式的答案和這個四位數一樣大？</p> <p>① 只有甲 ② 只有乙 ③ 只有乙、丙、丁 ④ 甲、乙、丙、丁</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.16	0.25	0.04
2	0.27	0.25	0.22
3*	0.47	0.33	0.74
4	0.09	0.16	0.01
未作答	0.01	0.00	0.00
通過率	0.47	鑑別度	0.40
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.40，試題品質良好；通過率為 0.47，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 3，通過率為 47%，顯示近五成的學生已掌握阿拉伯計數系統位值的概念。</p> <p>(3)有 16%的學生選擇選項 1(低分組有 25%)，這些學生可能無法掌握阿拉伯計數系統位值的概念，認為四位數字 $xyzw = x + y + z + w$。</p> <p>(4)有 27%的學生選擇選項 2(低分組有 25%、高分組有 22%)，這些學生可能已能掌握阿拉伯計數系統位值的概念，但是只接受 $xyzw = 1000x + 100y + 10z + w$ 這一種十進位表示法。學生可能不接受 $xyzw = (10x + y) \times 100 + 10z + w$，也不接受 $xyzw = 1000x + (10y + z) \times 10 + w$。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>6-a-04：能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性。</p> <p>評量重點：</p>		

	7-a-01：能熟練符號的意義，及其代數運算。
補救教學 建議	<p>(一)建議教師先以數字為例(例如：3456)，引入十進位表示法，並幫助學生認識除了十進位表示法之外，還有其它的表示方法。</p> <p>十進位表示法：$3456 = 3 \times 1000 + 4 \times 100 + 5 \times 10 + 6 \times 1$</p> <p>其它的表示法：$3456 = 34 \times 100 + 5 \times 10 + 6 \times 1$</p> $= 3 \times 1000 + 45 \times 10 + 6 \times 1$ $= 34 \times 100 + 56 \times 1$ $= 345 \times 10 + 6 \times 1$ <p>$3456 = 345 \times 10 + 6 \times 1$ 可以幫助學生理解為何 3456 的個位數字 6 是偶數時，3456 就是 2 的倍數。</p> <p>$3456 = 34 \times 100 + 56$ 可以幫助學生理解為何 3456 最後 2 個數字 56 是 4 的倍數時，3456 就是 4 的倍數。</p> <p>當學生有一些數字情境解題的經驗後，再將數字改記成未知數，例如：$xyzw = 1000x + 100y + 10z + w$</p> $xyzw = xy \times 100 + z \times 10 + w \times 1$ $= x \times 1000 + yz \times 10 + w \times 1$ $= xy \times 100 + zw \times 1$ $= xyz \times 10 + w \times 1$

題號	27		
內容領域	代數	認知歷程向度	程序執行
分年細目	7-a-03：能理解一元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出一元一次方程式。		
試題內容	<p>「等腰梯形的上底比腰多 4 公分，腰比下底少 6 公分，若梯形的周長是 70 公分，請問等腰梯形的腰長多少公分？」假設等腰梯形的腰長 y 公分，依題意可以列出下列哪個方程式？</p> <p>① $(y+4)+(y+6)+y \times 2=70$</p> <p>② $(y+4)+(y-6)+y \times 2=70$</p> <p>③ $(y+4)+(6-y)+y \times 2=70$</p> <p>④ $(y+4)+(y+6)+y=70$</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.38	0.23	0.65
2	0.39	0.37	0.28
3	0.11	0.21	0.02
4	0.11	0.18	0.05
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.38	鑑別度	0.42
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.42，試題品質良好；通過率為 0.38，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 1，通過率為 38%，顯示近四成的學生已能由具體情境中列出一元一次方程式。</p> <p>(3)有 39%的學生選擇選項 2(低分組有 37%)，這些學生可能已能由具體情境中列出一元一次方程式，但是誤解題意或混淆基準量與比較量間的關係，將「腰比下底少 6 公分」解讀為「下底比腰少 6 公分」。</p> <p>(4)有 11%的學生選擇選項 3(低分組有 21%)，這些學生可能已能由具體情境中列出一元一次方程式，但是誤解題意或混淆基準量與比較量間的關係，將「腰比下底少 6 公分」解讀為「下底比腰少 6 公分」，且錯誤記成「$6-y$」。</p> <p>(5)有 11%的學生選擇選項 4(低分組有 18%)，這些學生可能已能由具體情境中列出一元一次方程式，且已掌握基準量與比較量間的關係，但是列出周長時只列出等腰梯形中的一腰 y。</p>		

教材地位 分析	<p>先備的知識：</p> <p>5-a-04：能將整數單步驟的具體情境問題列成含有未知數符號的算式，並能解釋算式、求解及驗算。</p> <p>評量重點：</p> <p>7-a-03：能理解一元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出一元一次方程式。</p>
補救教學 建議	<p>(一)建議七年級教師在恰有一個未知數的情境中進行列式的活動，不宜引入有兩個未知數的情境。</p> <p>以問題「買一個漢堡及一包薯條共需 55 元，買了 3 個漢堡及 2 包薯條共花了 145 元，請問漢堡一個多少元？」為例，該題屬於含兩個未知數的情境，假設漢堡一個 x 元，薯條一包 y 元，可以列出二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x + y = 55 \\ 3x + 2y = 145 \end{cases}$，雖然將 $y = 55 - x$ 代入 $3x + 2y = 145$ 後，可以依題意列出一元一次方程式 $x + 110 = 145$，但這類問題的列式對國中一年級學生而言相當困難，建議教師不宜過度進行這類問題的教學。</p>

題號	28		
內容領域	數與量	認知歷程向度	問題解決
分年細目	7-n-10：能理解指數為非負整數的次方，並能運用到算式中。		
試題內容	算算看， $(2^{10}+2^{10})\div(2^{10}-2^9)=?$ ① 2^{19} ② 2^{10} ③ 2^2 ④ 2		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.32	0.32	0.20
2	0.19	0.27	0.11
3*	0.29	0.17	0.55
4	0.19	0.23	0.14
未作答	0.01	0.00	0.00
通過率	0.29	鑑別度	0.39
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.39，試題品質佳；通過率為 0.29，試題難易度中偏難。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 3，通過率為 29%，顯示近三成的學生已能理解指數為非負整數的次方，並能運用到算式中。</p> <p>(3)有 32%的學生選擇選項 1(低分組有 32%、高分組有 20%)，這些學生可能混淆乘法、除法指數律與指數為非負整數的次方的意義。 學生可能的算法如下：$(2^{10}+2^{10})\div(2^{10}-2^9)=(2^{10+10})\div(2^{10-9})=2^{20}\div2^1=2^{19}$。</p> <p>(4)有 19%的學生選擇選項 2(低分組有 27%、高分組有 11%)，這些學生可能混淆乘法、除法指數律與指數為非負整數的次方的意義。 學生可能的算法如下：$(2^{10}+2^{10})\div(2^{10}-2^9)=(2^{10+1})\div(2^{10-9})=2^{11}\div2^1=2^{10}$。</p> <p>(5)有 19%的學生選擇選項 4(低分組有 23%、高分組有 14%)，這些學生可能無法掌握乘法、除法指數律與指數為非負整數的次方的意義。 學生可能的算法如下：$(2^{10}+2^{10})\div(2^{10}-2^9)=(2^{10+10})\div(2^{10+9})=2^{20}\div2^{19}=2^1=2$。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識： 5-a-01：能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化心算。</p> <p>評量重點：</p>		

	7-n-10：能理解指數為非負整數的次方，並能運用到算式中。
補救教學 建議	<p>(一)幫助學生認識 $7+7=7\times 2$，$\frac{3}{7}+\frac{3}{7}=\frac{3}{7}\times 2$，$y+y=y\times 2$，</p> <p>所以 $2^{10}+2^{10}=2^{10}\times 2=2^{11}$。</p> <p>有兩種幫助學生計算 $2^{10}-2^9$ 的方法</p> <p>方法一：$2^{10}-2^9=2\times 2^9-2^9=2^9$</p> <p>(2個 2^9 減去 1個 2^9，剩下 1個 2^9)</p> <p>方法二：$2^{10}-2^9=2\times 2^9-2^9=2\times 2^9-1\times 2^9=(2-1)\times 2^9=2^9$</p> <p>方法一是把 2^9 看成 1個單位的解題方法，概念上比較簡單，方法二是利用乘法對減法的分配律來解題，概念上比較困難。</p> <p>(二)可透過「某數連加可簡記為乘法」來類比「某數連乘可簡記為指數」，讓學生知道指數是一種簡記的方法。</p> <p>例如：$\overbrace{3+3+3+3+3+3}^{6\text{個}3\text{連加}}=3\times 6$；$\overbrace{3\times 3\times 3\times 3\times 3\times 3}^{6\text{個}3\text{連乘}}=3^6$。</p>

題號	29		
內容領域	數與量	認知歷程向度	概念理解
分年細目	7-n-11：能理解同底數的相乘或相除的指數律。		
試題內容	<p>甲說：$-2^4 = (-2)^4$</p> <p>乙說：$-2^4 = -(2)^4$</p> <p>丙說：$-(2^3)^4 = (-2^4)^3$</p> <p>請問哪些人的說法正確？</p> <p>① 只有甲 ② 只有乙 ③ 甲和丙 ④ 乙和丙</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.22	0.33	0.08
2	0.31	0.21	0.44
3	0.21	0.30	0.07
4*	0.26	0.15	0.41
未作答	0.01	0.00	0.00
通過率	0.26	鑑別度	0.26
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.26，試題品質尚可；通過率為 0.26，試題難易度中偏難。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 4，通過率為 26%，顯示近三成的學生已認識「指數部份先算」運算次序的約定。</p> <p>(3)有 22%的學生選擇選項 1(低分組有 33%)，有 21%的學生選擇選項 3(低分組有 30%)，這些學生可能不認識「指數部份先算」運算次序的約定，誤認為$-2^4 = (-2)^4$。</p> <p>(4)有 31%的學生選擇選項 2(低分組有 21%、高分組有 44%)，這些學生可能認識「指數部份先算」運算次序的約定，知道$-2^4 = -(2)^4$，但是在有兩層指數的情境中，無法延伸「指數部份先算」運算次序的約定，誤認為$-(2^3)^4 = (-2^4)^3$。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>5-a-01：能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化心算。</p> <p>評量重點：</p>		

	7-n-11：能理解同底數的相乘或相除的指數律。
補救教學 建議	<p>(一)關於-3^2這類指數前方出現負號的問題，學生常搞混運算的順序，教師宜跟學生說明，這裡其實是省略了一個括號，我們習慣將$-(3^2)$的括號省略後記為-3^2，因此在計算-3^2時，次方的順序優先於負號，教師亦可在遇到相關問題時，都協助學生將括號補上，以避免學生搞混運算順序。</p> <p>(二)教師宜多舉例強調，進行包含指數的式子運算時，若有括號則括號先算，沒有括號時，指數運算優先於四則運算，</p> <p>例如：$-3^2 = -(3^2) = -(3 \times 3) = -9$；</p> <p>$2 \times 3^4 = 2 \times (3^4) = 2 \times (3 \times 3 \times 3 \times 3) = 162$；</p> <p>$6 \div 3^4 = 6 \div (3^4) = 6 \div (3 \times 3 \times 3 \times 3) = \frac{2}{27}$；</p> <p>$5 + 3^4 = 5 + (3^4) = 5 + (3 \times 3 \times 3 \times 3) = 86$。</p>

題號	30		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
分年細目	7-n-01：能理解質數的意義，並認識 100 以內的質數。		
試題內容	<p>老師在黑板上寫了「1、2、3、…、58、59、60」等 60 個數字，他依序先把 2 的倍數都劃掉，再把 3 的倍數都劃掉，再把 4 的倍數都劃掉，…，再把 49 的倍數都劃掉，最後再把 50 的倍數都劃掉。</p> <p>請問黑板上還有多少個數字沒有被劃掉？</p> <p>① 2 個 ② 3 個 ③ 4 個 ④ 10 個</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.17	0.17	0.18
2*	0.26	0.21	0.45
3	0.19	0.25	0.12
4	0.37	0.36	0.26
未作答	0.01	0.00	0.00
通過率	0.26	鑑別度	0.24
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.24，試題品質尚可；通過率為 0.27，試題難易度中偏難。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 2，通過率為 27%，顯示近三成的學生已認識 100 以內的質數。</p> <p>(3)有 17%的學生選擇選項 1(低分組有 17%、高分組有 18%)，這些學生可能理解質數的意義，但是誤解題意，忘記 1 並沒有被劃掉。</p> <p>(4)有 19%的學生選擇選項 3(低分組有 25%)，這些學生可能理解質數的意義，但是不具備判斷 3 的被數的能力，誤認為 57 也是質數。</p> <p>(5)有 37%的學生選擇選項 4(低分組有 36%、高分組有 26%)，這些學生可能不理解質數的意義；也可能誤解題意，誤認為將 50</p>		

	劃掉後，還剩下 51~60 等 10 個數字。
教材地位 分析	<p>先備的知識：</p> <p>6-n-01：能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解(質數 < 20，質因數 < 20，被分解數 < 100)。</p> <p>評量重點：</p> <p>7-n-01：能理解質數的意義，並認識 100 以內的質數。</p>
補救教學 建議	建議教師提供學生利用埃拉拖賽尼(Eratosthenes)篩選法，找出 100 以內質數的解題經驗，並認識 100 以內的質數。

花蓮縣八年級學生數學成就試題表現現況分析

資料來源：

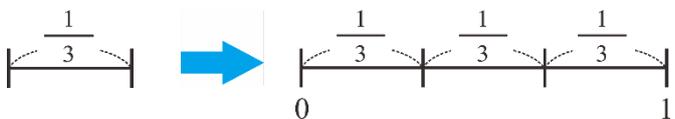
花蓮縣國民中小學教育長期資料庫

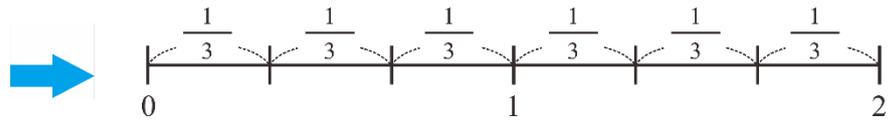
107 學年度八年級數學領域學生基本能力檢核試卷

分析者：

國立臺南大學 謝堅老師

題號	1		
內容領域	數與量	認知歷程向度	概念理解
分年細目	7-n-08：能理解數線，數線上兩點的距離公式，及能藉數線上數的位置驗證數的大小關係。		
試題內容	<p>甲說：$9-1-\frac{1}{4}=9-1-\frac{1}{4}$</p> <p>乙說：$9-1-\frac{1}{4}=9-1+\frac{1}{4}$</p> <p>丙說：數線上，$-1-\frac{1}{4}$和0的距離是「$-1+\frac{1}{4}$」</p> <p>丁說：數線上，$-1-\frac{1}{4}$和0的距離是「$-1-\frac{1}{4}$」</p> <p>請問哪些人的說法正確？</p> <p>① 甲和丙 ② 甲和丁 ③ 乙和丙 ④ 乙和丁</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.14	0.22	0.04
2*	0.54	0.25	0.88
3	0.20	0.40	0.02
4	0.12	0.13	0.06
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.54	鑑別度	0.63
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為0.63，試題品質良好；通過率為0.54，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項2，通過率為54%，顯示五成五的學生已掌握數線上兩點的距離公式，並具備負分數計算的能力。</p> <p>(3)本題是七、八年級共同試題，七年級的通過率為51%(高分組87%、低分組28%)，八年級的通過率為54%(高分組88%、低分組25%)，八年級的通過率比七年級高了3%。可能的原因如下：</p> <p>①七年級試題將絕對值的符號誤印成引號，雖然多數學生應該理解要計算的是這兩個數的絕對值，但可能導至部份學生因誤解而解題失敗，因此七年級的通過率比八年級低。</p> <p>②八年級高分組學生的通過率比七年級高分組學生高了1%，八年級低分組學生的通過率比七年級低分組學生低了3%，</p>		

	<p>而整體學生的通過率高了 3%，顯示多數學生應該理解要計算的是這兩個數的絕對值。</p> <p>③本題的通過率不高，可能與學生無法掌握帶分數有關，建議教師應進行帶分數的命名活動，幫助學生理解 $4\frac{2}{3}$ 是由 4 和 $\frac{2}{3}$ 合起來的數，也就是說 $4 + \frac{2}{3} = 4\frac{2}{3}$，$4\frac{2}{3} = 4 + \frac{2}{3}$；$-4\frac{2}{3}$ 是由 -4 和 $(-\frac{2}{3})$ 合起來的數，也就是說 $-4 + (-\frac{2}{3}) = -4\frac{2}{3}$，$-4\frac{2}{3} = -4 + (-\frac{2}{3})$。</p>
<p>教材地位 分析</p>	<p>先備的知識：</p> <p>5-n-13：能將分數、小數標記在數線上。</p> <p>評量重點：</p> <p>7-n-08：能理解數線，數線上兩點的距離公式，及能藉數線上數的位置驗證數的大小關係。</p>
<p>補救教學 建議</p>	<p>(一)國小階段討論的對象是全數(自然數和0的聯集)，0是沒有的意思，例如0個蘋果指的是沒有蘋果；國中階段討論的對象是整數，0並不是沒有，而是基準上的定位，例如攝氏0度並不是沒有溫度，而是水結冰的溫度。</p> <p>建議教師引入含負數的數線時，先溝通整數數線上原點 0 的意義。</p> <p>(二)先幫助學生引入正數的分數數線，再幫助學生引入負數的分數數線。</p> <p>(1)引入正數的分數數線</p> <p>教師可以透過下列方法繪製分數數線，幫助學生認識分數數線：透過單位分數的累積，例如畫出 3 個 $\frac{1}{3}$ 為 1 單位，6 個 $\frac{1}{3}$ 為 2 單位等方式繪製分數數線，幫助學生認識分數數線。如下所示：</p> <p>累積 3 個 $\frac{1}{3}$，可以合成 1；累積 6 個 $\frac{1}{3}$，可以合成 2。</p> 



建議教師不宜透過將1單位分割成3等份的方式製作分數數線，學生沒有將單位長度1分割成3等份的能力，且這樣的分割方式很難恰好精確。
再將分數標記在數線上。

題號	2		
內容領域	數與量	認知歷程向度	問題解決
分年細目	7-n-07：能熟練數的運算規則。		
試題內容	<p>已知「$23.57 \times 247 = 5821.79$」，$甲 = 13.57 \times 247$，$乙 = 23.57 \times 147$。</p> <p>請問甲和乙兩數相差多少？</p> <p>① 10 ② 11.3 ③ 21.79 ④ 113</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.22	0.27	0.12
2	0.12	0.22	0.04
3	0.15	0.24	0.06
4*	0.51	0.27	0.78
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.51	鑑別度	0.51
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.51，試題品質良好；通過率為 0.51，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 4，通過率為 52%，顯示超過五成的學生已具備利用乘法對加法的分配律簡化計算的能力。</p> <p>(3)本題是七、八年級共同試題，七年級的通過率為 48%（高分組 82%、低分組 25%），八年級的通過率為 51%（高分組 78%、低分組 27%），八年級的通過率比七年級高了 3%。可能的原因如下：</p> <p>①國中八年級引入乘法公式及因式分解，這兩類問題都是乘法對加法的分配律的延伸，因為多了這些問題解題的經驗，因此通過率比七年級高。</p> <p>②八年級高分組學生的通過率比七年級高分組學生低了 4%，八年級低分組學生的通過率比七年級低分組學生高了 2%，而整體學生的通過率高了 3%，可能的原因是八年級時學生面對的都是用未知數表示的算式，較少練習數字情境的問題。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>5-a-01：能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化心算。</p> <p>評量重點：</p> <p>7-n-07：能熟練數的運算規則。</p>		

補救教學
建議

(一)乘法對加法的分配律是一種關係，指的是同一個先加後乘(或連乘兩次再加)的多步驟問題情境，一定有兩種算法，這兩種算法的答案一定相等。

下面以「豆漿一杯 20 元，乳酪蛋餅一個 40 元，媽媽買了 6 杯豆漿、6 個蛋餅，請問要付多少元？」為例，說明認識乘法對加法的分配律的兩個層次：

層次一：學生必須分別算出這兩種算法的答案，才能看到這兩種算法的答案相同。

學生必須算出 $(20+40)\times 6=360$ 和 $20\times 6+40\times 6=360$ 的答案，發現這兩種算法的答案相同，可以得到「 $(20+40)\times 6=20\times 6+40\times 6$ 」，也可以得到「 $20\times 6+40\times 6=(20+40)\times 6$ 」。

層次二：學生不必算這兩種算法的答案，就能預期兩種算法的答案一定相同。

因為這兩種算法都是算出「豆漿一杯 20 元，乳酪蛋餅一個 40 元，媽媽買了 6 杯豆漿、6 個蛋餅，請問要付多少元？」的正確算法，學生不必算出答案，就知道 $(20+40)\times 6$ 和 $20\times 6+40\times 6$ 的答案一定相等，可以記成「 $(20+40)\times 6=20\times 6+40\times 6$ 」，也可以記成「 $20\times 6+40\times 6=(20+40)\times 6$ 」。

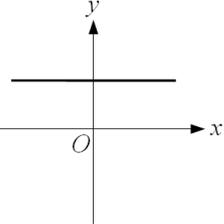
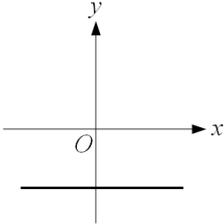
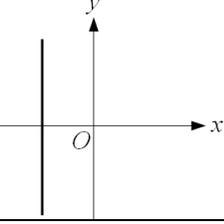
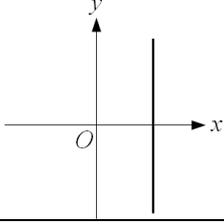
教師應先幫助層次一的學生提升至層次二，再幫助層次二的學生，將數字情境「 $(20+40)\times 6=20\times 6+40\times 6$ 」和「 $20\times 6+40\times 6=(20+40)\times 6$ 」改記成未知數情境「 $(a+b)\times c=axb+axc$ 」和「 $axb+axc=(a+b)\times c$ 」。

題號	3		
內容領域	數與量	認知歷程向度	概念理解
分年細目	7-n-11：能理解同底數的相乘或相除的指數律。		
試題內容	<p>甲說：$-2^4 = (-2)^4$</p> <p>乙說：$-2^4 = -(2)^4$</p> <p>丙說：$-(2^3)^4 = (-2^4)^3$</p> <p>請問哪些人的說法正確？</p> <p>① 只有甲 ② 只有乙 ③ 甲和丙 ④ 乙和丙</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.35	0.48	0.17
2	0.37	0.25	0.52
3	0.14	0.19	0.06
4*	0.14	0.08	0.24
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.14	鑑別度	0.16
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.16，試題品質不良；通過率為 0.14，試題難易度難。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 4，通過率為 14%，顯示超過一成的學生已認識「指數部份先算」運算次序的約定。</p> <p>(3)本題是七、八年級共同試題，七年級的通過率為 26%(高分組 41%、低分組 15%)，八年級的通過率為 14%(高分組 24%、低分組 8%)，八年級的通過率比七年級低了 12%。可能的原因如下：</p> <p>①學生可能已熟悉「括號先算」、「先乘除後加減」和「由左往右算」等運算次序的約定，不熟悉能將「先乘除後加減」的約定類推至「指數部份先算」。</p> <p>②八年級高分組學生的通過率比七年級高分組學生低了 17%，八年級低分組學生的通過率比七年級低分組學生低了 7%，而整體學生的通過率低了 12%，可能的原因是高分組的學生在七年級時因為經常練習而答對，這些學生可能不認識「指數部份先算」運算次序的約定。</p> <p>③建議教師幫助學生將「先乘除後加減」的約定類推至「指數部份先算」。</p>		
教材地位	先備的知識：		

分析	<p>5-a-01：能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化心算。</p> <p>評量重點：</p> <p>7-n-11：能理解同底數的相乘或相除的指數律。</p>
補救教學建議	<p>(一)關於-3^2這類指數前方出現負號的問題，學生常搞混運算的順序，教師宜跟學生說明，這裡其實是省略了一個括號，我們習慣將$-(3^2)$的括號省略後記為-3^2，因此在計算-3^2時，次方的順序優先於負號，教師亦可在遇到相關問題時，都協助學生將括號補上，以避免學生搞混運算順序。</p> <p>(二)教師宜多舉例強調，進行包含指數的式子運算時，若有括號則括號先算，沒有括號時，指數運算優先於四則運算，</p> <p>例如：$-3^2 = -(3^2) = -(3 \times 3) = -9$；</p> <p>$2 \times 3^4 = 2 \times (3^4) = 2 \times (3 \times 3 \times 3 \times 3) = 162$；</p> <p>$6 \div 3^4 = 6 \div (3^4) = 6 \div (3 \times 3 \times 3 \times 3) = \frac{2}{27}$；</p> <p>$5 + 3^4 = 5 + (3^4) = 5 + (3 \times 3 \times 3 \times 3) = 86$。</p>

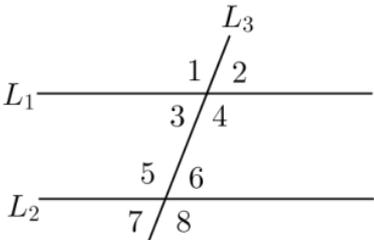
題號	4		
內容領域	代數	認知歷程向度	問題解決
分年細目	7-a-01：能熟練符號的意義，及其代數運算。		
試題內容	<p>有一個四位數字 $xyzw$，x、y、z、w 是 0 到 9 的整數，$x \neq 0$，</p> <p>甲 $= x + y + z + w$，</p> <p>乙 $= 1000x + 100y + 10z + w$，</p> <p>丙 $= (10x + y) \times 100 + 10z + w$，</p> <p>丁 $= 1000x + (10y + z) \times 10 + w$，</p> <p>請問哪些算式的答案和這個四位數一樣大？</p> <p>① 只有甲 ② 只有乙 ③ 只有乙、丙、丁 ④ 甲、乙、丙、丁</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.15	0.23	0.03
2	0.20	0.26	0.12
3*	0.55	0.32	0.82
4	0.09	0.18	0.02
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.55	鑑別度	0.51
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.51，試題品質良好；通過率為 0.55，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 3，通過率為 55%，顯示五成五的學生已掌握阿拉伯計數系統位值的概念。</p> <p>(3)本題是七、八年級共同試題，七年級的通過率為 47%(高分組 74%、低分組 33%)，八年級的通過率為 55%(高分組 82%、低分組 32%)，八年級的通過率比七年級高了 8%。可能的原因如下：</p> <p>①本題通過率不高的原因可能是 97 課綱的教材沒有引入十進位表示法，沒有整合整數和小數，幫助學生理解十進位的位值概念可以延伸表示更大和更小的數。</p> <p>②八年級的通過率比七年級高，可能與八年級教材引入多項式的四則運算有關，多項式的加、減、乘、除運算(直式運算)和整數的加、減、乘、除直式算則都有位值的概念。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>6-a-04：能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並</p>		

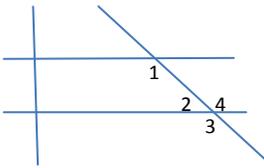
	<p>檢驗解的合理性。。</p> <p>評量重點：</p> <p>7-a-01：能熟練符號的意義，及其代數運算。</p>
<p>補救教學 建議</p>	<p>(一)建議教師先以數字為例(例如：3456)，引入十進位表示法，並幫助學生認識除了十進位表示法之外，還有其它的表示方法。</p> <p>十進位表示法：$3456 = 3 \times 1000 + 4 \times 100 + 5 \times 10 + 6 \times 1$</p> <p>其它的表示法：$3456 = 34 \times 100 + 5 \times 10 + 6 \times 1$</p> $= 3 \times 1000 + 45 \times 10 + 6 \times 1$ $= 34 \times 100 + 56 \times 1$ $= 345 \times 10 + 6 \times 1$ <p>$3456 = 345 \times 10 + 6 \times 1$ 可以幫助學生理解為何 3456 的個位數字 6 是偶數時，3456 就是 2 的倍數。</p> <p>$3456 = 34 \times 100 + 56$ 可以幫助學生理解為何 3456 最後 2 個數字 56 是 4 的倍數時，3456 就是 4 的倍數。</p> <p>當學生有一些數字情境解題的經驗後，再將數字改記成未知數，例如：$xyzw = 1000x + 100y + 10z + w$</p> $xyzw = xy \times 100 + z \times 10 + w \times 1$ $= x \times 1000 + yz \times 10 + w \times 1$ $= xy \times 100 + zw \times 1$ $= xyz \times 10 + w \times 1$

題號	5		
內容領域	代數	認知歷程向度	概念理解
分年細目	7-a-13：能在直角坐標平面上描繪二元一次方程式的圖形。		
試題內容	<p>下列何者可能是二元一次方程式 $0x+3y=-5$ 的圖形？</p> <p>①  ② </p> <p>③  ④ </p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.26	0.37	0.09
2*	0.48	0.19	0.84
3	0.16	0.24	0.06
4	0.10	0.18	0.01
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.48	鑑別度	0.64
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.64，試題品質良好；通過率為 0.48，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 2，通過率為 48%，顯示近五成的學生已能在直角坐標平面上描繪二元一次方程式的圖形。</p> <p>(3)本題是七、八年級共同試題，七年級的通過率為 58%(高分組 93%、低分組 25%)，八年級的通過率為 48%(高分組 84%、低分組 19%)，八年級的通過率比七年級低了 10%。可能的原因如下：</p> <p>①本題的通過率不高，可能與學生不習慣方程式 $0x+3y=-5$ 的記法有關，學生熟悉的是 $3y=-5$ 的記法。</p> <p>②學生學習繪製 x 項或 y 項為 0 的方程式圖形並沒有內蘊化，比</p>		

	<p>較容易遺忘。</p> <p>③二元一次方程式的標準式為 $ax+by=c$，a、b、c 是實數，$a^2+b^2\neq 0$，建議教師教學時先引入 $ax+0y=c$ 或 $0x+by=c$ 的記法，學生掌握其意義後，再簡化記成 $ax=c$ 或 $by=c$。</p>
<p>教材地位 分析</p>	<p>先備的知識：</p> <p>7-a-11：能理解平面直角坐標系。</p> <p>評量重點：</p> <p>7-a-13：能在直角坐標平面上描繪二元一次方程式的圖形。</p>
<p>補救教學 建議</p>	<p>(一)學生雖然會畫出二元一次方程式的圖形，但對於「圖形上的點為方程式的解」或是「圖形上的任何一點會代入方程式會使方程式成立」之觀念較為薄弱。可先請學生利用二元一次方程式的部份解轉成如同點坐標的數對，再將這些數點描繪到坐標平面上讓學生發現：(1)這些點都會落在一條直線上；(2)這條直線上的其他點當轉成 x 與 y 的解時，也可以滿足給定的二元一次方程式。例如：請學生坐標平面上畫出 $x+y=5$ 的圖形時，先找到一些整數解，像是 $(x, y)=(0, 5)$、$(1, 4)$、$(2, 3)$、$(3, 2)$、$(4, 1)$、$(5, 0)$，可落在一條直線上，再請同學觀察這些直線的其他點轉成 x 與 y 的解時，是否可以代入方程式會使方程式成立；或是找到這條直線以外的某些點，驗證這些點所轉換的數對，代入方程式後無法使方程式成立。</p> <p>(二)學生學習列出二元一次方程式的時候，教師應幫助學生將只有一個未知數的方程式像是 $x=5$ 或 $y=5$ 視為 $x+0y=5$ 或 $0x+y=5$ 的簡記，若遇到化簡後形如為 $x=k$(常數)或 $y=k$(常數)的圖形問題，同學應可以與二元一次方程式的標準式 $ax+by=c$ 作連結，將 $x=k$ 改為 $x+0y=k$ 或將 $y=k$ 改為 $0x+y=k$，如此便可得到 $x+0y=k$ 的圖形為通過 $(k, 0)$、$(k, 1)$、$(k, 2)$... 的垂直線；同理也可得到 $0x+y=k$ 的圖形為通過 $(0, k)$、$(1, k)$、$(2, k)$... 的水平線。最後讓同學發現 $x=0$ 在表為 $x+0y=0$ 之後，可視為通過 $(0, 0)$ 的垂直線(即 y 軸)；而 $y=0$ 在表為 $0x+y=0$ 之後，可視為通過 $(0, 0)$ 的水平線(即 x 軸)。</p>

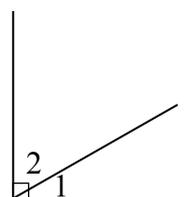
題號	6		
內容領域	幾何	認知歷程向度	程序執行
分年細目	8-s-09：能熟練直角坐標上任兩點的距離公式。		
試題內容	直角坐標平面上 A(3, 7)、B(-2, 7)兩點的距離為何？ ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.10	0.24	0.00
2	0.05	0.13	0.00
3*	0.80	0.50	0.99
4	0.05	0.12	0.01
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.80	鑑別度	0.49
試題品質分析	(1)本題鑑別度為 0.49，試題品質良好；通過率為 0.80，試題難易度易。 (2)本題正確答案為選項 3，通過率為 80%，顯示八成的學生已具備利用直角坐標上任兩點距離公式解題的能力。 (3)有 10%的學生選擇選項 1(低分組有 24%)，這些學生可能不具備利用直角坐標上任兩點的距離公式解題的能力，將題目給定兩點的 x 坐標相加為答案；也可能記錯公式，且在計算時發生錯誤。 學生可能的算法如下： $(3 - (-2)) + (7 - 7) = 1 + 0 = 1$ 。		
教材地位分析	先備的知識： 7-n-08：能理解數線，數線上兩點的距離公式，及能藉數線上數的位置驗證數的大小關係。 評量重點： 8-s-09：能熟練直角坐標上任兩點的距離公式。		
補救教學建議	(一)建議教師要求學生將給定的兩點標示在直角坐標上，再利用數線上兩點距離公式或畢氏定理來解題。		

題號	7		
內容領域	幾何	認知歷程向度	概念理解
分年細目	8-s-05：能理解平行的意義，平行線截線性質，以及平行線判別性質。		
試題內容	<p>如圖，L_1 和 L_2 被 L_3 所截，請問下列何者可以確認，L_1 和 L_2 互相平行？</p>  <p> ① $\angle 1 = \angle 5$ ② $\angle 6 = \angle 7$ ③ $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ ④ $\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$ </p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.75	0.51	0.94
2	0.10	0.18	0.03
3	0.07	0.17	0.01
4	0.07	0.14	0.01
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.75	鑑別度	0.44
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.44，試題品質良好；通過率為 0.75，試題難易度中偏易。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 1，通過率為 75%，顯示七成五的學生已能理解平行的意義，以及平行線判別性質。</p> <p>(3)有 10%的學生選擇選項 2(低分組有 18%)，這些學生可能不理解平行的意義，以及平行線判別性質；也可能混淆對頂角與內錯角的意義，誤認對頂角為內錯角。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>4-s-06：能理解平面上直角、垂直與平行的意義。</p> <p>評量重點：</p> <p>8-s-05：能理解平行的意義，平行線截線性質，以及平行線判別性質。</p>		
補救教學	(一)建議透過兩線被一線所截的情境，說明如何區分同側與異側，		

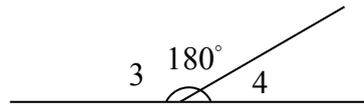
建議	<p>內錯與外錯，同位與異位的判斷方法。</p> <p>L_1 及 L_2 被一線 L 所截，</p> <p>(1) 在 L 同一邊的兩角稱為同側，在 L 不同邊的兩角稱為異側。</p> <p>(2) 在 L_1 及 L_2 裡面的兩角稱為內角，在 L_1 及 L_2 外面的兩角稱為外角。</p> <p>(3) 在 L_1 及 L_2 上面(或下面)兩角稱為同位角。</p> <p>(二)先複習國小階段平行線的定義「同時垂直於一直線 L 的兩直線 L_1 與 L_2 互相平行」</p> <p>(1) 說明兩直線被一線所截時，內錯角、同位角、同側內角名詞的意義。</p> <p>(2) 延伸國小平行線的定義，透過下圖，說明平行線的判別性質，兩直線被一直線所截，若同位角相等（例：$\angle 1 = \angle 3$）、內錯角相等（例：$\angle 1 = \angle 4$）、同側內角互補（例：$\angle 1 + (\angle 2) = 180^\circ$）其中有一條件成立，則此兩直線平行。</p>  <p>(3) 舉一些例子，檢查學生是否能利用同位角相等，內錯角相等，同側內角互補的性質來判斷兩線是否平行。</p>
----	---

<p>補救教學 建議</p>	<p>(一)教師宜先協助學生理解乘法對加法的分配律，乘法對加法的分配律是所有乘法公式的先備知識。</p> <p>(二)學生熟悉乘法對加法的分配律之後，再協助學生利用乘法對加法的分配律來引導出乘法公式，引導的過程是利用兩次分配律進行拆解，教師可以先用數字舉例說明：例如</p> $32 \times 45 = 32 \times (40 + 5)$ $= 32 \times 40 + 32 \times 5$ $= (30 + 2) \times 40 + (30 + 2) \times 5$ $= 30 \times 40 + 2 \times 40 + 30 \times 5 + 2 \times 5$ $32 \times 45 = (30 + 2) \times (40 + 5)$ $(30 + 2) \times (40 + 5) = 30 \times 40 + 2 \times 40 + 30 \times 5 + 2 \times 5$ <p>學生理解之後，再將數字改記成未知數。</p> $(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$ <p>並透過箭頭或面積來幫助學生記憶。</p> <p>(三)學生理解乘法公式$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$之後，其他乘法公式皆可視為展開後合併項或消去項的結果。</p>
--------------------	--

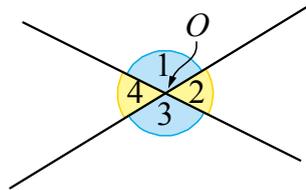
題號	9		
內容領域	幾何	認知歷程向度	概念理解
分年細目	8-s-02：能理解角的基本性質。		
試題內容	$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 互為對頂角， $\angle 1$ 和 $\angle 3$ 互為餘角， $\angle 1 = 30^\circ$ ， 求 $\angle 2 + \angle 3 = ?$ ① 90° ② 120° ③ 180° ④ 210°		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.52	0.24	0.83
2	0.19	0.38	0.03
3	0.22	0.26	0.13
4	0.06	0.12	0.01
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.52	鑑別度	0.59
試題品質分析	(1)本題鑑別度為 0.59，試題品質良好；通過率為 0.52，試題難易度適中。 (2)本題正確答案為選項 1，通過率為 52%，顯示超過五成的學生已認識對頂角、互補及互餘的意義。 (3)有 19%的學生選擇選項 2(低分組有 38%)，這些學生可能混淆直角與餘角的意義，誤認為餘角是直角。 學生可能的算法如下： $30 + 90 = 120$ (度) (4)有 22%的學生選擇選項 3(低分組有 26%)，這些學生可能混淆互補與互餘的意義，將餘角解讀為補角。		
教材地位分析	先備的知識： 5-s-01：能透過操作，理解三角形三內角和為 180 度。 評量重點： 8-s-02：能理解角的基本性質。		
補救教學建議	(一)複習直角的概念，並以一直線將直角分割成兩個角，如圖， $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ，我們稱 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 互餘，所以 $\angle 1$ 是 $\angle 2$ 的餘角， $\angle 2$ 是 $\angle 1$ 的餘角。		



(二)複習平角的概念，並以一直線將平角分割成兩個角，如圖，
 $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ ，我們稱 $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 互補，所以 $\angle 3$ 是 $\angle 4$ 的
補角， $\angle 4$ 是 $\angle 3$ 的補角。



(三)畫出相交於一點的兩條直線，如圖，以 O 為頂點的四個角中，
 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ，
 $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ ，
 $\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3$ ，可得 $\angle 1 = \angle 3$ ，同理， $\angle 2 = \angle 4$ 。
所以對頂角相等。

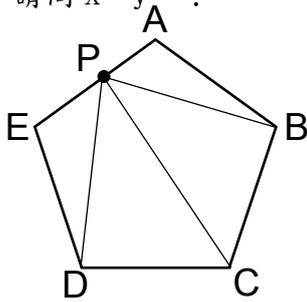


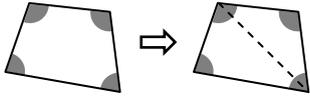
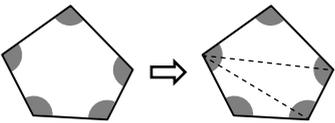
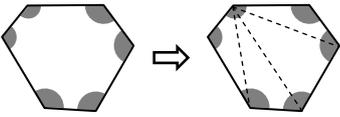
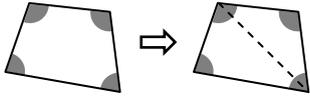
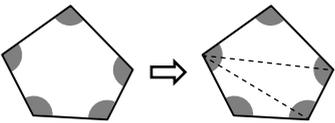
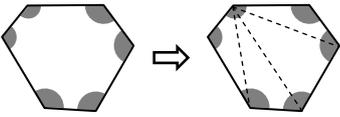
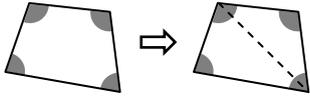
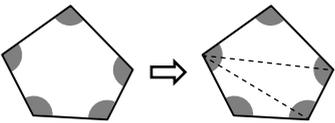
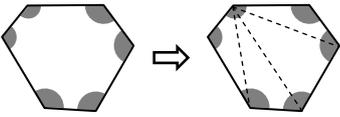
題號	10		
內容領域	代數	認知歷程向度	程序執行
分年細目	8-a-07：能利用提公因式法分解二次多項式。		
試題內容	下列何者為 $x(2x+3)-(2x+3)$ 因式分解的結果？ ① x ② $2x+3$ ③ $x(2x+3)$ ④ $(x-1)(2x+3)$		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.13	0.24	0.02
2	0.09	0.16	0.02
3	0.19	0.34	0.02
4*	0.59	0.26	0.93
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.59	鑑別度	0.68
試題品質分析	(1) 本題鑑別度為 0.68，試題品質良好；通過率為 0.59，試題難易度適中。 (2) 本題正確答案為選項 4，通過率為 59%，顯示近六成的學生已能利用提公因式法分解二次多項式。 (3) 有 13% 的學生選擇選項 1（低分組有 24%），這些學生可能不能利用提公因式法分解二次多項式；也可能將其視為多項式的乘法及加法運算，且在計算時發生錯誤。學生可能的算法如下： $x(2x+3)-(2x+3)$ $=(x-0)+[(2x+3)-(2x+3)]$ $=x。$ (4) 有 19% 的學生選擇選項 3（低分組有 34%），這些學生可能不能利用提公因式法分解二次多項式；也可能將其視為多項式的乘法及加法運算，且在計算時發生錯誤。學生可能的算法如下： $x(2x+3)-(2x+3)$ $=x(2x+3)[(2x+3)-(2x+3)]$ $=x(2x+3)。$		
教材地位分析	先備的知識： 8-a-01：能熟練二次式的乘法公式。 評量重點： 8-a-07：能利用提公因式法分解二次多項式。		
補救教學建議	(一) 乘法對加法的分配律是乘法公式和因式分解的先備知識，乘法對加法的分配律是雙向的關係，當我們將注意力放在		

	<p>「$(a+b)xc=axc+bx c$」時，教學的重點是乘法公式，當我們將注意力放在「$axc+bx c=(a+b)xc$」時，教學的重點是因式分解。國小五年級已在數字情境引入乘法對加法的分配律，國中七年級將數字情境延伸至未知數情境，國中八年級先引入乘法公式，後引入因式分解，因此在學習因式分解時，學生應該已熟悉乘法公式。</p> <p>(二)以計算「$78 \times 99 + 78 = ?$」為例，建議教師不要直接宣告要將78改記成78×1，教師可以透過$78 \times (99 + 1) = 78 \times 99 + 78 \times 1 = 78 \times 99 + 78$，幫助學生認識「$78 \times 99 + 78$」是「$78 \times 99 + 78 \times 1$」的簡記。</p> <p>以因式分解「$x(2x + 3) - (2x + 3)$」為例，建議教師不要直接宣告要將$(2x + 3)$改記成$1 \times (2x + 3)$，教師可以透過$(x - 1) \times (2x + 3) = x(2x + 3) - 1(2x + 3) = x(2x + 3) - (2x + 3)$，幫助學生認識「$x(2x + 3) - (2x + 3)$」是「$x(2x + 3) - 1(2x + 3)$」的簡記。</p>
--	--

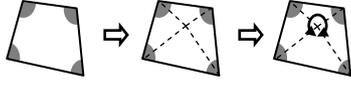
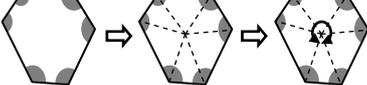
題號	11		
內容領域	幾何	認知歷程向度	概念理解
分年細目	8-s-06：能理解線對稱的意義，以及能應用到理解平面圖形的幾何性質。		
試題內容	<p>平行四邊形、箏形、菱形這 3 種圖形中，哪幾種圖形是線對稱圖形？</p> <p>① 只有平行四邊形、菱形 ② 只有平行四邊形、箏形</p> <p>③ 只有箏形、菱形 ④ 3 種都是</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.13	0.21	0.04
2	0.04	0.09	0.01
3*	0.52	0.27	0.80
4	0.31	0.43	0.15
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.52	鑑別度	0.53
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.53，試題品質良好；通過率為 0.52，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 3，通過率為 52%，顯示超過五成的學生已能理解線對稱的意義。</p> <p>(3)有 13%的學生選擇選項 1(低分組有 21%)，這些學生可能受到平行四邊形兩雙對邊平行視覺的影響，認為平行四邊形是線對稱圖形；也可能不認識箏形，或受到箏形有鄰邊不等長視覺的影響，誤認為箏形不是線對稱圖形。</p> <p>(4)有 31%的學生選擇選項 4(低分組有 43%)，這些學生可能受到平行四邊形兩雙對邊平行視覺的影響，認為平行四邊形是線對稱圖形。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>5-s-04：能認識線對稱與簡單平面圖形的線對稱性質。。</p> <p>評量重點：</p> <p>8-s-06：能理解線對稱的意義，以及能應用到理解平面圖形的幾何性質。</p>		
補救教學建議	<p>(一)國小四年級已引入平行四邊形、菱形的定義，國中才引入箏形的定義，引入定義之後表示學生應該已掌握這些圖形所成集合的意義。</p>		

	<p>以菱形是否為線對稱圖形為例，學生應該掌握各種不同形狀的菱形，教師應說明如果所有的菱形都是線對稱圖形，才能稱菱形是線對稱圖形。</p> <p>再以平行四邊形是否為線對稱圖形為例，學生應該掌握各種不同形狀的平行四邊形，教師應說明如果有些平行四邊形是線對稱圖形，有些平行四邊形不是線對稱圖形，對所有的平行四邊形而言，我們稱平行四邊形不是線對稱圖形。</p> <p>(二)教師可以舉一個不是線對稱圖形的平行四邊形的反例，幫助學生認識只要有 1 個平行四邊形不是線對稱圖形，就可以知道平行四邊形不是線對稱圖形。</p>
--	---

題號	12		
內容領域	幾何	認知歷程向度	問題解決
分年細目	8-s-03：能理解凸多邊形內角和以及外角和公式。		
試題內容	<p>如圖，P 為五邊形 ABCDE 邊 \overline{EA} 上的一點，$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCD$ 和 $\triangle PDE$ 這 4 個三角形的內角和是 x°，五邊形 ABCDE 的內角和是 y°，請問 $x-y=?$</p>  <p>① 0 ② 90 ③ 180 ④ 360</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.16	0.15	0.13
2	0.12	0.25	0.02
3*	0.57	0.38	0.78
4	0.14	0.20	0.07
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.57	鑑別度	0.40
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.40，試題品質良好；通過率為 0.57，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 3，通過率為 57%，顯示近六成的學生已能理解三角形及凸多邊形內角和公式。</p> <p>(3)有 16%的學生選擇選項 1(低分組有 15%)，這些學生可能不理解凸多邊形內角和公式，誤認為 n 邊形內角和為 $(n-1)\times 180$ 度。 學生可能的算法如下：$(5-1)\times 180-180\times 4=0$(度)。</p> <p>(4)有 12%的學生選擇選項 2(低分組有 25%)，這些學生可能不理解凸多邊形內角和公式，誤認為 n 邊形內角和為 $n\times 180$ 度。 學生可能的算法如下：$5\times 180-180\times 4=180$(度)。</p>		

	<p>(5)有 14%的學生選擇選項 4(低分組有 20%)，這些學生可能不理解凸多邊形內角和公式，誤認為 n 邊形內角和為 $(n+1) \times 180$ 度。</p> <p>學生可能的算法如下：$(5+1) \times 180 - 180 \times 4 = 360$(度)。</p>																
<p>教材地位 分析</p>	<p>先備的知識：</p> <p>5-s-01：能透過操作，理解三角形三內角和為 180 度。</p> <p>評量重點：</p> <p>8-s-03：能理解凸多邊形內角和以及外角和公式。</p>																
<p>補救教學 建議</p>	<p>(一)國小五年級已經透過操作得知三角形內角和為 180 度，也能推論出給定的 K 邊形內角和是 $(K-2) \times 180$ 度，但是並沒有引入凸多邊形的內角和公式。</p> <p>過小階段引入的 K 是未知數，是一個確定的數字；國中階段引入內角和公式「$(n-2) \times 180$ 度」中的 n 是變數的概念，n 表示 3、4、5、...中任意一個數字。</p> <p>(二)提出兩種引入凸邊形內角和的方法：</p> <p>方法一：選定一個頂點，跟其他頂點連出對角線</p> <table border="1" data-bbox="405 1240 1337 1966"> <thead> <tr> <th data-bbox="405 1240 485 1384">n 邊 形</th> <th data-bbox="485 1240 935 1384">切 割</th> <th data-bbox="935 1240 1067 1384">三角 形 個 數</th> <th data-bbox="1067 1240 1337 1384">內 角 和</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="405 1384 485 1581">四 邊 形</td> <td data-bbox="485 1384 935 1581">  </td> <td data-bbox="935 1384 1067 1581">2</td> <td data-bbox="1067 1384 1337 1581">$180^\circ \times 2 = 360^\circ$</td> </tr> <tr> <td data-bbox="405 1581 485 1778">五 邊 形</td> <td data-bbox="485 1581 935 1778">  </td> <td data-bbox="935 1581 1067 1778">3</td> <td data-bbox="1067 1581 1337 1778">$180^\circ \times 3 = 540^\circ$</td> </tr> <tr> <td data-bbox="405 1778 485 1966">六 邊 形</td> <td data-bbox="485 1778 935 1966">  </td> <td data-bbox="935 1778 1067 1966">4</td> <td data-bbox="1067 1778 1337 1966">$180^\circ \times 4 = 720^\circ$</td> </tr> </tbody> </table>	n 邊 形	切 割	三角 形 個 數	內 角 和	四 邊 形		2	$180^\circ \times 2 = 360^\circ$	五 邊 形		3	$180^\circ \times 3 = 540^\circ$	六 邊 形		4	$180^\circ \times 4 = 720^\circ$
n 邊 形	切 割	三角 形 個 數	內 角 和														
四 邊 形		2	$180^\circ \times 2 = 360^\circ$														
五 邊 形		3	$180^\circ \times 3 = 540^\circ$														
六 邊 形		4	$180^\circ \times 4 = 720^\circ$														

方法二：從多邊形內部任取一點，連線段至各頂點

n 邊 形	切 割	三 角 形 個 數	內 角 和
四 邊 形		4	$180^\circ \times 4 - 360^\circ$ $= 720^\circ - 360^\circ$ $= 360^\circ$
五 邊 形		5	$180^\circ \times 5 - 360^\circ$ $= 900^\circ - 360^\circ$ $= 540^\circ$
六 邊 形		6	$180^\circ \times 6 - 360^\circ$ $= 1080^\circ - 360^\circ$ $= 720^\circ$

題號	13		
內容領域	代數	認知歷程向度	問題解決
分年細目	8-a-08：能利用乘法公式與十字交乘法做因式分解。		
試題內容	已知 $x^2-8x+12=(x+a)(x+b)$ ， $a>b$ ，請問 $a-b=?$ ① 4 ② 8 ③ -4 ④ -8		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.57	0.29	0.88
2	0.12	0.21	0.02
3	0.20	0.36	0.04
4	0.10	0.14	0.05
未作答	0.01	0.00	0.00
通過率	0.57	鑑別度	0.60
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.60，試題品質良好；通過率為 0.57，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 1，通過率為 57%，顯示近六成的學生已能利用十字交乘法做因式分解。</p> <p>(3)有 12%的學生選擇選項 2(低分組有 21%)，這些學生可能無法利用十字交乘法做因式分解；也可能已能利用十字交乘法做因式分解，但誤解題意，且將答案改記成 a、b 時發生錯誤。學生可能的算法如下： $x^2-8x+12=(x-2)(x-6)$ $=(x+a)(x+b)$ $\Rightarrow a=6、b=2 \Rightarrow a+b=8$</p> <p>(4)有 20%的學生選擇選項 3(低分組有 36%)，這些學生可能無法利用十字交乘法做因式分解；也可能已能利用十字交乘法做因式分解，但誤解題意，且將答案改記成 a、b 時發生錯誤。學生可能的算法如下： $x^2-8x+12=(x-2)(x-6)$ $=(x+a)(x+b)$ $\Rightarrow a=2、b=6 \Rightarrow a-b=2-6=-4$ 或 $x^2-8x+12=(x-2)(x-6)$ $=(x+a)(x+b)$ $\Rightarrow a=-6、b=-2 \Rightarrow (-6)-(-2)=-4$</p> <p>(5)有 10%的學生選擇選項 4(低分組有 14%)，這些學生可能無法利用十字交乘法做因式分解；也可能已能利用十字交乘法做因式分解，但誤解題意，將減法問題看成加法問題。</p>		

	<p>學生可能的算法如下：$x^2-8x+12=(x-2)(x-6)$ $= (x+a)(x+b)$ $\Rightarrow a=-2, b=-6 \Rightarrow a+b=-2+(-6)=-8$</p>
教材地位 分析	<p>先備的知識： 8-a-01：能熟練二次式的乘法公式。 評量重點： 8-a-08：能利用乘法公式與十字交乘法做因式分解。</p>
補救教學 建議	<p>(一)國中常見提公因式法、乘法公式法及十字交乘法三種因式分解的方法，其中最困難的是十字交乘法。 以$(x+2)(x+3)=x(x+3)+2(x+3)=x^2+3x+2x+6$ $=x^2+5x+6$為例， 分解$x(x+3)+2(x+3)$比較簡單，因為算式中還能看到乘法對加法分配律的樣式，分解x^2+5x+6比較困難，因為$5x$是$2x$和$3x$兩項合併的結果，看不到乘法對加法分配律的樣式，必須將x^2+5x+6拆成$x^2+3x+2x+6$才能分解。</p> <p>(二)建議先跟學生示範以下的多項式乘法展開式，理解用十字交乘法因式分解時常數項分解兩數乘積的正負數類型： 假設$(x+p)(x+q)=x^2+(p+q)x+pq$，</p> <p>(1) $p>0, q>0 \Leftrightarrow p+q>0$且$pq>0$ $x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$，p, q皆為正數</p> <p>(2) $p<0, q<0 \Leftrightarrow p+q<0$且$pq>0$ $x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$，p, q皆為負數</p> <p>(3) $p>0, q<0 \Rightarrow pq<0$，無法判斷$p+q>0$或$p+q<0$ $p<0, q>0 \Rightarrow pq<0$，無法判斷$p+q>0$或$p+q<0$ $x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$，無法判斷p, q的正負</p>

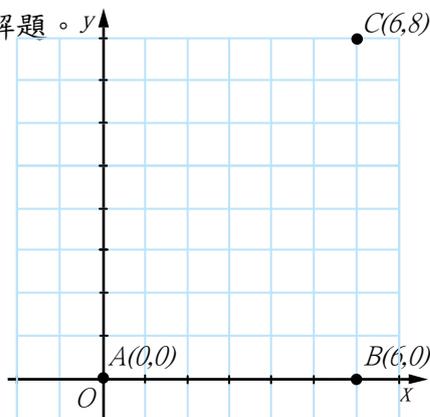
題號	14		
內容領域	幾何	認知歷程向度	問題解決
分年細目	8-s-09：能熟練直角坐標上任兩點的距離公式。		
試題內容	<p>已知直角坐標上由$(0, 0)$、$(1, 0)$、$(0, 1)$、$(1, 1)$四個點所圍成正方形的面積是 8 平方公分，請問直角坐標上$(0, 7)$、$(3, 7)$、$(6, 3)$三點所圍成三角形的面積是多少平方公分？</p> <p>① 6 ② 12 ③ 48 ④ 96</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.16	0.14	0.18
2	0.28	0.32	0.21
3*	0.44	0.36	0.52
4	0.12	0.16	0.08
未作答	0.01	0.00	0.00
通過率	0.44	鑑別度	0.16
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.16，試題品質不良；通過率為 0.44，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 3，通過率為 44%，顯示超過四成的學生已具備利用直角坐標上任兩點的距離公式解決問題的能力。</p> <p>(3)有 16%的學生選擇選項 1(低分組有 14%、高分組有 18%)，這些學生可能已具備利用直角坐標上任兩點的距離公式解決問題的能力，算出三角形的面積為 6，但是誤解題意，誤以為由$(0, 0)$、$(1, 0)$、$(0, 1)$、$(1, 1)$四個點所圍成正方形的面積是 1 平方公分。</p> <p>(4)有 28%的學生選擇選項 2(低分組有 32%、高分組有 21%)，這些學生可能已具備利用直角坐標上任兩點的距離公式解決問題的能力，但在計算三角形面積時誤用公式底\times高，忘記除以 2，這些學生也誤解題意，誤以為由$(0, 0)$、$(1, 0)$、$(0, 1)$、$(1, 1)$四個點所圍成正方形的面積是 1 平方公分。</p> <p>(5)有 12%的學生選擇選項 4(低分組有 16%)，這些學生可能已具備利用直角坐標上任兩點的距離公式解決問題的能力，但在計算三角形面積時記錯公式，直接利用底\times高算出三角形面積。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>7-n-08：能理解數線，數線上兩點的距離公式，及能藉數線上數的位置驗證數的大小關係。</p>		

評量重點：

8-s-09：能熟練直角坐標上任兩點的距離公式。

(一)建議教師要求學生將給定的兩點標示在直角坐標上，再利用數線上兩點距離公式或畢氏定理來解題。

(二)下面以「已知 $A(0,0)$ 、 $B(6,0)$ 、 $C(6,8)$ 三點，求 $AC=?$ 」為例，說明如何幫助學生解題。



補救教學
建議

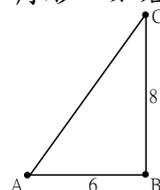
(1)首先計算出 $\overline{AB} = 6 - 0 = 6$ ，因為 A 、 B 兩點都在 x 軸上。

(2)再計算出 $\overline{BC} = 8 - 0 = 8$ ，因為 B 、 C 兩點都平行於 y 軸。

(3)連接 A 、 B 、 C 三點，形成一個直角三角形，如右下圖：

(4)利用畢氏定理： $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ ，

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$



(5)如果學生記得兩點距離公式，也可以直接將 A 、 C 兩點坐標代

入公式「 $\overline{AC} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ 」解題，當 $A(0,0)$ 時， a

$$= 0, b = 0; C(6,8) \text{ 時}, c = 6, d = 8, \overline{AC} = \sqrt{(6-0)^2 + (8-0)^2}$$

$$= \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

題號	15		
內容領域	代數	認知歷程向度	程序執行
分年細目	8-a-01：能熟練二次式的乘法公式。		
試題內容	算算看， $(2x-1)^2=?$ ① $2x^2+4x+1$ ② $2x^2-4x+1$ ③ $4x^2+4x+1$ ④ $4x^2-4x+1$		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.09	0.21	0.01
2	0.21	0.34	0.07
3	0.12	0.23	0.03
4*	0.57	0.21	0.89
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.57	鑑別度	0.68
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.68，試題品質良好；通過率為 0.57，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 4，通過率為 57%，顯示近六成的學生已熟練二次式乘法公式$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$。</p> <p>(3)有 21%的學生選擇選項 2(低分組有 34%)，這些學生可能已熟練二次式乘法公式$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，但在計算時發生錯誤。學生可能的算法如下： $(2x-1)^2=(2x)^2-2(2x)(1)+(1)^2$ $=2x^2-4x+1。$</p> <p>(4)有 12%的學生選擇選項 3(低分組有 23%)，這些學生可能誤解題意，將減法問題解讀為加法問題；也可能已熟練二次式乘法公式$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，但在計算時發生錯誤。學生可能的算法如下：$(2x-1)^2=(2x)^2-2(2x)(1)+(1)^2$ $=2x^2+4x+1。$</p>		
教材地位分析	先備的知識： 7-n-07：能熟練數的運算規則。 評量重點： 8-a-01：能熟練二次式的乘法公式。		
補救教學建議	(一)教師宜先協助學生理解乘法對加法的分配律，乘法對加法的分配律是所有乘法公式的先備知識。 (二)學生熟悉乘法對加法的分配律之後，再協助學生利用乘法對加法的分配律來引導出乘法公式，引導的過程是利用兩次分配律		

進行拆解，教師可以先用數字舉例說明：例如

$$32 \times 45 = 32 \times (40 + 5)$$

$$= 32 \times 40 + 32 \times 5$$

$$= (30 + 2) \times 40 + (30 + 2) \times 5$$

$$= 30 \times 40 + 2 \times 40 + 30 \times 5 + 2 \times 5$$

$$32 \times 45 = (30 + 2) \times (40 + 5)$$

$$(30 + 2) \times (40 + 5) = 30 \times 40 + 2 \times 40 + 30 \times 5 + 2 \times 5$$

學生理解之後，再將數字改記成未知數。

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

並透過箭頭或面積來幫助學生記憶。

(三) 學生理解乘法公式 $(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$ 之後，其他乘法公式皆可視為展開後合併項或消去項的結果。

題號	16		
內容領域	代數	認知歷程向度	程序執行
分年細目	8-a-04：能熟練多項式的加、減、乘、除四則運算。		
試題內容	$(x^2 - 5x + 6)(2x - 5) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，請問 $b = ?$ ① -15 ② -10 ③ 5 ④ 10		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.54	0.15	0.91
2	0.18	0.28	0.06
3	0.18	0.34	0.03
4	0.09	0.21	0.01
未作答	0.01	0.00	0.00
通過率	0.54	鑑別度	0.76
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.76，試題品質良好；通過率為 0.54，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 1，通過率為 54%，顯示超過五成的學生已熟練多項式的乘法運算。</p> <p>(3)有 18%的學生選擇選項 2(低分組有 28%)，這些學生可能不熟練多項式的乘法運算，誤以為乘開後只有一項是 x^2 項。 學生可能的算法如下：$(-5) \times 2 = -10$。</p> <p>(4)有 18%的學生選擇選項 3(低分組有 34%)，這些學生可能不熟練多項式的乘法運算，誤以為乘開後只有一項是 x^2 項，且在計算時發生錯誤。 學生可能的算法如下：$1 \times (-5) = 5$。</p> <p>(3)有 9%的學生選擇選項 4(低分組有 21%)，這些學生可能不熟練多項式的乘法運算，誤以為乘開後只有一項是 x^2 項，且誤認為 $(x^2 - 5x + 6)$ 的一次項係數為 5。 學生可能的算法如下：$5 \times 2 = 10$。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識： 7-n-07：能熟練數的運算規則。</p> <p>評量重點： 8-a-04：能熟練多項式的加、減、乘、除四則運算。</p>		
補救教學建議	(一)教師宜先協助學生理解乘法對加法的分配律，乘法對加法的分配律是所有乘法公式的先備知識，也是多項式乘法運算的先備		

	<p>知識。</p> <p>(二)國中階段限制最多只能評量兩次乘以一次(或一次乘以兩次)的多項式，多數學生習慣使用乘法公式的方式進行運算，因此不限制學生使用橫式或直式來運算，只要能算出答案即可。</p>
--	---

題號	17		
內容領域	幾何	認知歷程向度	問題解決
分年細目	8-s-10：能理解三角形的基本性質。		
試題內容	<p>已知五邊形的 5 條邊都不等長，其中較短的四邊長分別是 3、5、8、11 公分，下列何者<u>不可能</u>是最長邊的邊長？</p> <p>① 12 公分 ② 20 公分 ③ 25 公分 ④ 28 公分</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.32	0.36	0.22
2	0.07	0.14	0.02
3	0.08	0.13	0.05
4*	0.51	0.36	0.71
未作答	0.01	0.00	0.00
通過率	0.51	鑑別度	0.35
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.35，試題品質佳；通過率為 0.51，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 4，通過率為 51%，顯示超過五成的學生已具備利用三角形任兩邊和大於第三邊的性質解題的能力。</p> <p>(3)有 32%的學生選擇選項 1(低分組有 36%、高分組有 22%)，這些學生可能不具備利用三角形任兩邊和大於第三邊的性質解題的能力。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>5-s-02：能透過操作，理解三角形任意兩邊和大於第三邊。</p> <p>評量重點：</p> <p>8-s-10：能理解三角形的基本性質。</p>		
補救教學建議	<p>(一)以三邊長為 a 公分、b 公分、c 公分($a \geq b \geq c$)的三角形為例，三角形任意兩邊和大於第三邊指的是「$a+b > c$，$a+c > b$，$b+c > a$」的性質。已知邊長為 a 公分、b 公分、c 公分($a \geq b \geq c$)的三根竹籤是否能圍成一個三角形，只要判斷「$b+c > a$」是否成立即可。</p> <p>(二)判斷給定的三線段是否能拼成三角形時，不必檢查任意兩邊和大於第三邊，只要檢查較短的兩邊和是否大於最長邊即可。如左下圖，較短的兩邊和的大於最長邊，因此可以圍成一個三角形。如右下圖，較短的兩邊和小於最長邊，因此不可以圍成一個三</p>		

角形



相同的理由，判斷給定的五線段是否能拼成五邊形時，不必檢查任意四邊和大於第五邊，只要檢查較短的四邊和是否大於最長邊即可。

題號	18		
內容領域	代數	認知歷程向度	程序執行
分年細目	8-a-04：能熟練多項式的加、減、乘、除四則運算。		
試題內容	<p>多項式 $3x^2+10x-8$ 除以 $3x-2$ 的商及餘式為何？</p> <p>① 商為 $x+4$、餘式為 0</p> <p>② 商為 $x+2$、餘式為 $2x-4$</p> <p>③ 商為 $x+4$、餘式為 -16</p> <p>④ 商為 $x+2$、餘式為 $2x-12$</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.49	0.17	0.85
2	0.26	0.38	0.08
3	0.12	0.25	0.01
4	0.14	0.19	0.06
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.49	鑑別度	0.68
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.68，試題品質良好；通過率為 0.49，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 1，通過率為 49%，顯示近五成的學生已熟練多項式的除法運算。</p> <p>(3)有 26%的學生選擇選項 2(低分組有 38%)，這些學生可能在計算式發生錯誤，$(3x^2+10x)-(3x-2)x=8x$，且不熟練多項式的除法運算，不知道餘式 $2x-4$ 的次數必須比除式 $3x-2$ 小。</p> <p>(4)有 12%的學生選擇選項 3(低分組有 25%)，這些學生可能已熟練多項式的除法運算，但在計算時發生錯誤。 學生可能的算法：$(3x^2+10x)-(3x-2)x=12x$。</p> <p>(5)有 14%的學生選擇選項 4(低分組有 19%)，這些學生可能在計算式發生錯誤，$(3x^2+10x)-(3x-2)x=12x$，且不熟練多項式的除法運算，不知道餘式 $2x-12$ 的次數必須比除式 $3x-2$ 小。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識： 7-n-07：能熟練數的運算規則。</p> <p>評量重點： 8-a-04：能熟練多項式的加、減、乘、除四則運算。</p>		

(一)被除式 A 除以除式 B，得到商式 Q 及餘式 R，一般學生會記為

$A \div B = Q \cdots R$ ，因 $A \div B = Q \cdots R$ 其中的等號只說明 A 式除以 B 式得到商式 Q 和餘式 R，並不代表兩邊相等，因此無法同加、同減、同乘或同除，建議老師引導學生將其記為 $A = B \times Q + R$ 。

(二)下面以「 $(4x^2 + x - 3) \div (x + 2)$ 」為例，說明如何幫助學生解題。

(1)說明「商式」及「餘式」的意義及限制。

幫助學生複習整數除法直式算則舊經驗，然後再將方法類比至多項式除法，比如：

$$\begin{array}{r}
 13 \\
 12 \overline{) 158} \\
 \underline{12} \\
 38 \\
 \underline{36} \\
 2
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 1 \times 10 + 3 \\
 1 \times 10 + 2 \overline{) 1 \times 10^2 + 5 \times 10 + 8} \\
 \underline{1 \times 10^2 + 2 \times 10} \\
 3 \times 10 + 8 \\
 \underline{3 \times 10 + 6} \\
 2
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{r}
 1x + 3 \\
 1x + 2 \overline{) 1x^2 + 5x + 8} \\
 \underline{1x^2 + 2x} \\
 3x + 8 \\
 \underline{3x + 6} \\
 2
 \end{array}$$

(2)幫學生複習多項式的乘法

例如： $6x(x+2) = 6x^2 + 12x$

(3)幫學生複習除式為單項式的除法

例如： $6x^2 \div (2x) = 3x$

(4) $(4x^2 + x - 3) \div (x + 2)$ 的直式紀錄為

The diagram shows the long division of $4x^2 + x - 3$ by $x + 2$. The steps are annotated as follows:

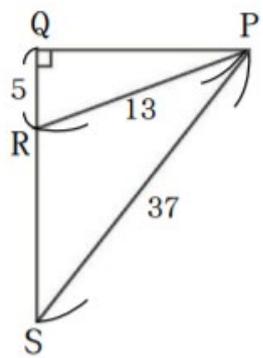
- ① $4x^2 \div x = 4x$ (determining the first term of the quotient)
- ② $4x \cdot (x + 2) = 4x^2 + 8x$ (multiplying the quotient term by the divisor)
- ③ $x - 8x = -7x$ (subtracting the product from the dividend)
- ④ $-7x \div x = -7$ (determining the second term of the quotient)
- ⑤ $-7 \cdot (x + 2) = -7x - 14$ (multiplying the second quotient term by the divisor)
- ⑥ $-3 - (-14) = 11$ (subtracting the product from the remainder to find the final remainder)

最後一步⑥： x 的次數比除數小的就不必再計算，就是餘式。所以，商式 $4x - 7$ ，餘式 11 。

題號	19		
內容領域	代數	認知歷程向度	概念理解
分年細目	8-a-10：能利用因式分解來解一元二次方程式。		
試題內容	已知 a、b 為一元二次方程式 $4x^2-1=0$ 的兩個解，請問 $a+b=?$ ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 4		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.10	0.17	0.02
2*	0.48	0.20	0.85
3	0.26	0.33	0.11
4	0.15	0.28	0.02
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.48	鑑別度	0.66
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.66，試題品質良好；通過率為 0.48，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 2，通過率為 48%，顯示近五成的學生已具備利用因式分解來解一元二次方程式的能力。</p> <p>(3)有 10%的學生選擇選項 1(低分組有 17%)，這些學生可能不具備利用因式分解來解一元二次方程式的能力；也可能將 $4x^2-1=0$ 分解為 $(2x+1)^2=0$，算出 $(-\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2})=-1$；也可能將 $4x^2-1=0$ 分解為 $(2x-1)^2=0$，但是在解一元一次方程式 $2x-1=0$ 時計算發生錯誤，算出 $x=-\frac{1}{2}$，$(-\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2})=-1$</p> <p>(4)有 26%的學生選擇選項 3(低分組有 33%)，這些學生可能不具備利用因式分解來解一元二次方程式的能力；也可能將 $4x^2-1=0$ 分解為 $(2x-1)^2=0$，算出 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$。</p> <p>(5)有 15%的學生選擇選項 4(低分組有 28%)，這些學生可能不具備利用因式分解來解一元二次方程式的能力；也可能將 $4x^2-1=0$ 分解為 $(2x-1)^2=0$，但是在解一元一次方程式 $2x-1=0$ 時計算發生錯誤，時計算發生錯誤，算出 $x=2$，$2+2=4$。</p>		
教材地位分析	先備的知識： 8-a-08：能利用乘法公式與十字交乘法做因式分解。 評量重點：		

	8-a-10：能利用因式分解來解一元二次方程式。
補救教學 建議	<p>(一)檢驗一元二次方程式的解時需作平方的計算，學生可能會將乘法與平方的計算次序弄錯，教師可以在此強調指數的運算次序優先於乘法運算。例如將 $x=2$ 代入 $3x^2$，誤把 $3 \cdot 2^2$ 計算成 $(3 \cdot 2)^2$，得到的結果是 36，教師強調 $3x^2 = 3x \times x$，將 $x=2$ 代入得到的值為 $3x^2 = 3 \times 2 \times 2 = 12$。</p> <p>(二)下面以「求 $(x-2)(x+3)=0$ 的解」為例，說明如何幫助學生解題。</p> <p>(1)複習方程式解的意義。</p> <p>將 $x=a$ 代入方程式之後，能讓等號成立，稱 a 為方程式的解。</p> <p>一元一次方程式「$x-1=0$」，$x=1$ 代入得到 $1-1=0$，會讓方程式成立，所以「1」是方程式「$x-1=0$」的解。</p> <p>(2)復習如何求一元一次方程式的解。</p> <p>$x+a=0$ 的解為 $-a$，$x-b=0$ 的解為 b。</p> <p>(3)說明「且」與「或」的意義。</p> <p>2 的倍數：2、4、6、8、10；3 的倍數：3、6、9。</p> <p>同時是 2 的倍數和 3 的倍數的數是 6，數學上稱 6 為 2 且 3 的倍數。</p> <p>可以是 2 的倍數，也可以是 3 的倍數的數有 2、3、4、6、8、9、10。數學上稱這些數為 2 或 3 的倍數。</p> <p>(4)$(x-2)(x+3)=0$，當 $x-2=0$，也就是 $x=2$ 代入方程式會讓等號成立，所以 2 是方程式的解；當 $x+3=0$，也就是 $x=-3$ 代入方程式會讓等號成立，所以 -3 也是方程式的解。</p> <p>(5)2 是方程式的解，-3 也是方程式的解，所以 $(x-2)(x+3)=0$ 的解為「$x=2$ 或 $x=-3$」。</p> <p>(6)舉一些形如 $(x+a)(x-b)=0$ 或 $(x+a)^2=0$ 的例子，幫助學生解題。</p>

題號	20		
內容領域	幾何	認知歷程向度	問題解決
分年細目	8-s-14：能用線對稱概念，理解等腰三角形、正方形、菱形、箏形等平面圖形。		
試題內容	<p>已知菱形的兩條對角線長分別為 12、16 公分，請問菱形邊長是多少公分？</p> <p>① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.06	0.12	0.01
2*	0.42	0.21	0.74
3	0.25	0.33	0.09
4	0.26	0.33	0.16
未作答	0.01	0.00	0.00
通過率	0.42	鑑別度	0.53
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.53，試題品質良好；通過率為 0.42，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 2，通過率為 42%，顯示超過四成的學生已能用線對稱概念，理解菱形對角線的性質。</p> <p>(3)有 25%的學生選擇選項 3(低分組有 33%)，這些學生可能無法用線對稱概念，理解菱形對角線的性質；也可能誤解題意，算出兩邊是 12 和 16 公分直角三角形的一股長，且在計算 $16^2 - 12^2$ 的平方根時計算發生錯誤。</p> <p>(4)有 26%的學生選擇選項 4(低分組有 33%)，這些學生可能無法用線對稱概念，理解菱形對角線的性質；也可能誤解題意，算出兩股是 12 和 16 公分直角三角形的斜邊長。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>8-s-06：能理解線對稱的意義，以及能應用到理解平面圖形的幾何性質。</p> <p>評量重點：</p> <p>8-s-14：能用線對稱概念，理解等腰三角形、正方形、菱形、箏形等平面圖形。</p>		
補救教學建議	<p>(一)國小四年級已引入平行四邊形的定義：四邊等長的四邊形稱為菱形。但國小階段並沒有討論菱形對角線互相垂直且平分的性質，也沒有討論菱形是否為平行四邊形。</p>		

題號	21		
內容領域	幾何	認知歷程向度	問題解決
分年細目	8-s-08：能理解畢氏定理(Pythagorean Theorem)及其應用。 (同 8-a-05)		
試題內容	<p>如圖所示，$\overline{QR} = 5$，$\overline{PR} = 13$，$\overline{PS} = 37$，請問直角$\triangle PQS$的周長為何？</p>  <p>① 55 ② 74 ③ 80 ④ 84</p>		
選答率	答題反應比率 (*表正確答案)		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.16	0.32	0.02
2	0.28	0.38	0.09
3	0.11	0.17	0.03
4*	0.45	0.12	0.85
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.45	鑑別度	0.74
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.74，試題品質良好；通過率為 0.45，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 4，通過率為 45%，顯示四成五的學生已具備利用畢氏定理解決生活中問題的能力。</p> <p>(3)有 16%的學生選擇選項 1(低分組有 32%)，這些學生可能不具備利用畢氏定理解決生活中問題的能力，直接將題目中的三個數字相加當作答案。</p> <p>(4)有 28%的學生選擇選項 2(低分組有 38%)，這些學生可能已具備利用畢氏定理解決生活中問題的能力，正確算出 QP 的長度是 12 公分，但在計算兩邊是 12 和 37 公分直角三角形的一股長時，正確算出 $37^2 - 12^2 = 1225$，但在計算 1225 的平方根時計算發生錯誤，將 1225 的平方根算成 25。</p>		

	<p>(5)有 11%的學生選擇選項 3(低分組有 17%)，這些學生可能已具備利用畢氏定理解決生活中問題的能力，正確算出 QP 的長度是 12 公分，但是誤解題意。</p> <p>學生可能的算法如下：$(5+12+13)+(37+13)=30+50=80$。</p>
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>7-n-08：能理解數線，數線上兩點的距離公式，及能藉數線上數的位置驗證數的大小關係。</p> <p>評量重點：</p> <p>8-s-08：能理解畢氏定理(Pythagorean Theorem)及其應用。 (同 8-a-05)</p>
補救教學建議	<p>(一)國小四年級已引入直角三角形的定義：有一個角是直角的三角形稱為直角三角形，國中階段教學重點是認識其斜邊與股的意義。</p> <p>(二)教師可以提供畢氏定理(勾股弦定理、商高定理)相關的數學史給學生參考。</p>

題號	22		
內容領域	代數	認知歷程向度	概念理解
分年細目	8-a-03：能認識多項式及相關名詞。		
試題內容	<p>下列關於多項式$-3x^3+4x-7$的敘述，何者正確？</p> <p>① x^2項的係數為 0</p> <p>② 常數項的係數為 7</p> <p>③ x^3項的係數為 3</p> <p>④ 將此多項式升冪排列，結果為$-7+4x+3x^3$</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.55	0.21	0.88
2	0.16	0.32	0.03
3	0.10	0.22	0.01
4	0.19	0.23	0.09
未作答	0.01	0.00	0.00
通過率	0.55	鑑別度	0.66
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.66，試題品質良好；通過率為 0.55，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 1，通過率為 55%，顯示五成五的學生已認識多項式及相關名詞。</p> <p>(3)有 16%的學生選擇選項 2(低分組有 32%)，有 10%的學生選擇選項 3(低分組有 22%)，這些學生可能不認識多項式係數的意義，誤認為多項式各項的係數都是正數。</p> <p>(4)有 19%的學生選擇選項 4(低分組有 23%)，這些學生可能不認識多項式升冪排列的意義；也可能認識多項式升冪排列的意義，但在重排時發生錯誤。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>4-n-01：能透過位值概念，延伸整數的認識到大數（含「億」、「兆」之位名），並作位值單位的換算</p> <p>評量重點：</p> <p>8-a-03：能認識多項式及相關名詞。</p>		
補救教學建議	<p>(一)一元 n 次多項式</p> $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\dots+a_2x^2+a_1x^1+a_0x^0$ <p>，一般我們會簡</p>		

記為 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ，其中 $a_n x^n$ 、 $a_{n-1} x^{n-1}$ 、 $a_{n-2} x^{n-2}$ 、 $a_{n-3} x^{n-3}$ 、 \dots 、 $a_2 x^2$ 、 $a_1 x$ 、 a_0 稱為項，且 a_n 為 x^n 的係數； a_{n-1} 為 x^{n-1} 的係數； a_{n-2} 為 x^{n-2} 的係數； a_{n-3} 為 x^{n-3} 的係數； \dots ， a_2 為 x^2 的係數； a_1 為 x 的係數； a_0 為常數項，也稱為常數項的係數。

(二) 常數多項式包含零次多項式(例如： $p(x)=3$ ， $\deg p(x)=0$)與零多項式(如： $r(x)=0$ ， $\deg r(x)$ 不定義次數)，零多項式不定義次數的緣由是因為避免與 $\deg f(x) \cdot g(x) = \deg f(x) + \deg g(x)$ 立論相違背，因此零次多項式不包含零多項式。例如：

$$(x^2+3x+5)(x+7)=x^3+10x^2+26x+35 \quad \text{我們可以發現}$$

$$\deg f(x) \cdot g(x)=3, \quad \deg f(x) + \deg g(x)=3$$

$$\text{符合 } \deg f(x) \cdot g(x) = \deg f(x) + \deg g(x);$$

$$(x^2+3x+5) \times 3 = 3x^2+9x+15 \quad \text{我們可以發現 } \deg f(x) \cdot g(x)=3,$$

$$\deg f(x) + \deg g(x)=3 \quad \text{符合 } \deg f(x) \cdot g(x) = \deg f(x) + \deg g(x);$$

$$(x^2+3x+5) \times 0 = 0 \quad \text{我們可以發現 } \deg f(x) \cdot g(x)=0,$$

$$\deg f(x) + \deg g(x) \neq 0, \quad \text{不符合 } \deg f(x) \cdot g(x) = \deg f(x) + \deg g(x)。$$

(三) 下面以「 $4-3x+x^3-2x^2$ 」為例，跟學生說明各名詞的意義。

x 的次方最高為 3，所以 $4-3x+x^3-2x^2$ 是 x 的三次多項式。

降冪排列為 x^3-2x^2-3x+4 ；升冪排列為 $4-3x-2x^2+x^3$ 。

三次多項式的標準式是 ax^3+bx^2+cx+d ($a \neq 0$)，學生容易

在判斷係數時發生錯誤，建議要求學生改記成 $x^3+(-2)x^2$

$+(-3)x+4$ 後，再找出各項及其係數。

題號	23		
內容領域	數與量	認知歷程向度	問題解決
分年細目	8-n-06：能理解等差級數求和的公式，並能解決生活中相關的問題。		
試題內容	等差數列的第 n 項是 $3n-12$ ，請問該等數數列前 10 項的和是多少？ ① 21 ② 45 ③ 63 ④ 81		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.15	0.30	0.02
2*	0.49	0.24	0.83
3	0.26	0.29	0.12
4	0.10	0.15	0.03
未作答	0.01	0.00	0.00
通過率	0.49	鑑別度	0.59
試題品質 分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.59，試題品質良好；通過率為 0.49，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 2，通過率為 49%，顯示有五成的學生已具備利用等差級數求和的公式解題的能力。</p> <p>(3)有 15%的學生選擇選項 1(低分組有 30%)，這些學生可能混淆等差數列以及等差級數的意義，求出等差數列的第 10 項，且在計算第 10 項時，誤認為第 4 項 0 不算一項，因而求出等差數列的第 11 項。</p> <p>(4)有 26%的學生選擇選項 3(低分組有 29%)，這些學生可能已具備利用等差級數求和的公式解決生活中問題的能力，但誤認為求和時只能計算正數的和。 學生可能的算法如下：$3+6+9+12+15+18=63$。</p> <p>(5)有 10%的學生選擇選項 4(低分組有 15%)，這些學生可能已具備利用等差級數求和的公式解決生活中問題的能力，但誤認為求和時計算的是絕對值的和。學生可能的算法如下： $9+6+3+0+3+6+9+12+15+18=81$。</p>		
教材地位 分析	<p>先備的知識： 8-n-05：能觀察出等差數列的規則性，並能利用首項、公差計算出等差數列的一般項。</p> <p>評量重點： 8-n-06：能理解等差級數求和的公式，並能解決生活中相關的問題。</p>		
補救教學	(一)數列是定義域為正整數的數列，以正偶數為例，如果將正偶數		

建議	<p>視為函數，數學上習慣記成$f(x)=2x$，x是正整數；如果將正偶數視為數列，數學上習慣記成$a_n=2n$，n是正整數</p> <p>(二)以等差數列1、4、7、10、13、16…說明如何推導第n項的值：</p> <table border="1" data-bbox="469 338 1339 680"> <thead> <tr> <th>項次</th> <th>值</th> <th>算式拆解(加法)</th> <th>算式拆解(乘法)</th> <th>一般項算式</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>$a_1=4$</td> <td>4</td> <td>$4+3\times 0$</td> <td>$4+3\times(1-1)$</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>$a_2=7$</td> <td>$4+3$</td> <td>$4+3\times 1$</td> <td>$4+3\times(2-1)$</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>$a_3=10$</td> <td>$4+3+3$</td> <td>$4+3\times 2$</td> <td>$4+3\times(3-1)$</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>$a_4=13$</td> <td>$4+3+3+3$</td> <td>$4+3\times 3$</td> <td>$4+3\times(4-1)$</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>$a_5=16$</td> <td>$4+3+3+3+3$</td> <td>$4+3\times 4$</td> <td>$4+3\times(5-1)$</td> </tr> </tbody> </table> <p>得到 $a_n= 4+3\times(n-1)$，$n=1、2、3、4、5、\dots\dots$</p>	項次	值	算式拆解(加法)	算式拆解(乘法)	一般項算式	1	$a_1=4$	4	$4+3\times 0$	$4+3\times(1-1)$	2	$a_2=7$	$4+3$	$4+3\times 1$	$4+3\times(2-1)$	3	$a_3=10$	$4+3+3$	$4+3\times 2$	$4+3\times(3-1)$	4	$a_4=13$	$4+3+3+3$	$4+3\times 3$	$4+3\times(4-1)$	5	$a_5=16$	$4+3+3+3+3$	$4+3\times 4$	$4+3\times(5-1)$
項次	值	算式拆解(加法)	算式拆解(乘法)	一般項算式																											
1	$a_1=4$	4	$4+3\times 0$	$4+3\times(1-1)$																											
2	$a_2=7$	$4+3$	$4+3\times 1$	$4+3\times(2-1)$																											
3	$a_3=10$	$4+3+3$	$4+3\times 2$	$4+3\times(3-1)$																											
4	$a_4=13$	$4+3+3+3$	$4+3\times 3$	$4+3\times(4-1)$																											
5	$a_5=16$	$4+3+3+3+3$	$4+3\times 4$	$4+3\times(5-1)$																											

題號	24		
內容領域	幾何	認知歷程向度	問題解決
分年細目	8-s-13：能理解平行四邊形及其性質。		
試題內容	<p>平行四邊形 ABCD 中，對角線 AC 將平行四邊形分割成 2 個全等的正三角形，已知 $\angle C = x^\circ$，請問 $x = ?$</p> <p>① 45° ② 60° ③ 120° ④ 135°</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.16	0.27	0.05
2	0.38	0.43	0.20
3*	0.40	0.19	0.75
4	0.05	0.10	0.01
未作答	0.00	0.00	0.00
通過率	0.40	鑑別度	0.55
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.55，試題品質良好；通過率為 0.40，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 3，通過率為 40%，顯示有四成的學生已能理解由兩個正三角形拼成平行四邊形的性質。</p> <p>(3)有 16%的學生選擇選項 1(低分組有 27%)，這些學生可能不理解由兩個正三角形拼成平行四邊形的性質；也可能誤解題意，畫出正方形代表平行四邊形，以等腰直角三角形的底角 45° 為答案。</p> <p>(4)有 38%的學生選擇選項 2(低分組有 43%)，這些學生可能不理解由兩個正三角形拼成平行四邊形的性質；也可能誤解題意，選擇正三角形一角的角 60° 為答案。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>4-s-07：能認識平行四邊形和梯形。</p> <p>評量重點：</p> <p>8-s-13：能理解平行四邊形及其性質。</p>		
補救教學建議	<p>(一)國小四年級已引入平行四邊形的定義：兩雙對邊平行的四邊形稱為平行四邊形。但是未引入兩雙對邊等長、兩雙對角相等，以及對角線將平行的四邊形分割成二個全等三角形等性</p> <p>(二)現行國小課程在二至五年級都出現正三角形的名詞，只是不同階段出現正三角形名詞的意義及教學的重點都不相同。</p>		

國小二年級引入三邊都一樣長的三角形，稱三邊都一樣長的三角形為正三角形，此時的正三角形並不是數學上正三角形的意義，只是三邊都一樣長三角形暫時的名字。

國小三年級再次討論正三角形，幫助學生認識正三角形不但三條邊一樣長，三個角也一樣大，為四年級引入正三角形的定義鋪路，此時的正三角形指的還是三邊都一樣長的三角形。

國小四年級開始給正三角形下定義，稱三條邊都一樣長且三個角都一樣大的三角形為正三角形，此時的正三角形不是數學上正 n 邊形的意義，只是三邊都一樣長且三個角都一樣大三角形的名字。

國小五年級引入正 n 邊形後，此時的正三角形才是正 n 邊形的一部份。

題號	25		
內容領域	代數	認知歷程向度	概念理解
分年細目	8-a-11：能利用配方法解一元二次方程式。		
試題內容	<p>下列何者為方程式 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的解？</p> <p>① $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ ② $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$</p> <p>③ $x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ ④ $x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.21	0.22	0.21
2	0.26	0.32	0.17
3*	0.31	0.20	0.48
4	0.20	0.25	0.12
未作答	0.01	0.00	0.00
通過率	0.31	鑑別度	0.28
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.28，試題品質尚可；通過率為 0.31，試題難易度中偏難。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 3，通過率為 31%，顯示超過三成的學生已具備利用配方法解一元二次方程式的能力。</p> <p>(3)有 21%的學生選擇選項 1(低分組有 22%)，有 26%的學生選擇選項 2(低分組有 32%)，有 20%的學生選擇選項 4(低分組有 25%)，這些學生可能不具備利用配方法解一元二次方程式的能力；也可能已具備利用配方法解一元二次方程式的能力，但在計算時發生錯誤；也可能已記憶一元二次方程式的公式解，但在計算時發生錯誤。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>8-a-09：能在具體情境中認識一元二次方程式，並理解其解的意義。</p> <p>評量重點：</p> <p>8-a-11：能利用配方法解一元二次方程式。</p>		
補救教學建議	(一)在說明公式解時，若以 $ax^2 + bx + c = 0$ 進行推導，		

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}$$

推導過程會產生 $\sqrt{4a^2} = 2|a|$ ，學生較難理解。

可以利用下列方式進行教學幫助學生理解公式解的推導過程，將 $ax^2 + bx + c = 0$ 等號左右兩邊同乘以 $4a$ ，再利用配方法進行推導。推導過程如下：

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c &= 0 \\4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 \\4a^2x^2 + 4abx &= -4ac \\4a^2x^2 + 4abx + b^2 &= -4ac + b^2 \\(2ax + b)^2 &= -4ac + b^2 \\2ax + b &= \pm\sqrt{-4ac + b^2} \\2ax &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\end{aligned}$$

題號	26		
內容領域	幾何	認知歷程向度	問題解決
分年細目	8-s-21：能理解弧長的公式以及扇形面積的公式。		
試題內容	<p>有甲、乙兩個扇形，扇形甲的直徑是扇形乙的 2 倍，扇形甲的圓心角是 15 度、扇形乙的圓心角是 120 度，請問扇形甲的面積是扇形乙面積的多少倍？</p> <p>① 4 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{16}$</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.14	0.20	0.05
2*	0.31	0.17	0.59
3	0.37	0.40	0.28
4	0.17	0.21	0.08
未作答	0.01	0.00	0.00
通過率	0.31	鑑別度	0.41
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.41，試題品質良好；通過率為 0.31，試題難易度中偏難。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 2，通過率為 31%，顯示超過三成的學生已具備利用扇形面積公式解題的能力。</p> <p>(3)有 14%的學生選擇選項 1(低分組有 20%)，這些學生可能不具備利用扇形面積公式解題的能力；也可能誤解題意，誤認為兩扇形的圓心角相等，扇形甲的直徑是扇形乙的 2 倍，所以扇形甲的面積是扇形乙的 4 倍。</p> <p>(4)有 37%的學生選擇選項 3(低分組有 40%、高分組有 28%)，這些學生可能不具備利用扇形面積公式解題的能力；也可能判斷扇形半徑與扇形面積關係時發生錯誤，學生知道扇形甲的圓心角是扇形乙的 $\frac{1}{8}$ 倍，但誤認為扇形甲的直徑是扇形乙的 2 倍，所以扇形甲的面積也是扇形乙的 2 倍，$\frac{1}{8} \times 2 = 4$，所以扇形甲的面積是扇形乙的 4 倍。</p> <p>(5)有 17%的學生選擇選項 4(低分組有 21%)，這些學生可能不具備利用扇形面積公式解題的能力；也可能判斷扇形半徑與扇形面積關係時發生錯誤，學生知道扇形甲的圓心角是扇形乙</p>		

	<p>的 $\frac{1}{8}$ 倍，但誤認為扇形甲的直徑是扇形乙的 2 倍，所以扇形甲的面積也是扇形乙的 2 倍，這些學生又誤解題意，$\frac{1}{8} \div 2 = \frac{1}{16}$，所以扇形甲的面積是扇形乙的 $\frac{1}{16}$ 倍。</p>
<p>教材地位 分析</p>	<p>先備的知識： 5-s-03：能認識圓心角，並認識扇形。 6-s-03：能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。 (同 6-n-14)</p> <p>評量重點： 8-s-21：能理解弧長的公式以及扇形面積的公式。</p>
<p>補救教學 建議</p>	<p>(一) 國小六年級已幫助學生理解圓面積的公式，並計算簡單扇形的面積，和國中最大的差別是國小階段的圓周率是 3.14，國中階段改用 π 來表示圓周率。</p> <p>(二) 「扇形甲的直徑是扇形乙的 2 倍」是集合的描述，下面的情境都滿足「扇形甲的直徑是扇形乙的 2 倍」 扇形甲的直徑是 2 時，扇形乙的直徑是 1， 扇形甲的直徑是 12 時，扇形乙的直徑是 6， 扇形甲的直徑是 $\frac{1}{8}$ 時，扇形乙的直徑是 $\frac{1}{16}$。</p> <p>建議教師先舉上面的例子讓學生解題，幫助學生發現這些例子算出來的答案都一樣，因此以後面對「扇形甲的直徑是扇形乙的 2 倍」時，可以任意假設扇形甲和扇形乙直徑的長度。</p>

題號	27		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
分年細目	8-n-05：能觀察出等差數列的規則性，並能利用首項、公差計算出等差數列的一般項。		
試題內容	已知「7、11、15、19、…」是等差數列，請問其第 n 項為何？ ① 6+n ② 7+4n ③ 1+4n ④ 3+4n		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.06	0.13	0.01
2	0.41	0.47	0.22
3	0.13	0.23	0.02
4*	0.39	0.15	0.75
未作答	0.01	0.00	0.00
通過率	0.39	鑑別度	0.60
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.60，試題品質良好；通過率為 0.39，試題難易度適中。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 4，通過率為 39%，顯示近四成的學生已具備利用首項、公差計算出等差數列一般項的能力。</p> <p>(3)有 41%的學生選擇選項 2(低分組有 47%)，這些學生可能不具備利用首項、公差計算出等差數列一般項的能力；也可能記錯公式，將 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 誤記成 $a_n = a_1 + nd$。 學生可能的算法如下：$a_n = a_1 + nd = 7 + 4n$。</p> <p>(4)有 13%的學生選擇選項 3(低分組有 23%)，這些學生可能不具備利用首項、公差計算出等差數列一般項的能力；也可能記錯公式，將 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 誤記成 $a_n = a_1 + nd$，又誤認為首項 a_1 是 1。學生可能的算法如下：$a_n = a_1 + nd = 1 + 4n$。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識： 6-n-13：能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性。(同 6-a-04)</p> <p>評量重點： 8-n-05：能觀察出等差數列的規則性，並能利用首項、公差計算出等差數列的一般項。</p>		
補救教學建議	(一)數列是定義域為正整數的數列，以正偶數為例，如果將正偶數視為函數，數學上習慣記成 $f(x) = 2x$ ，x 是正整數；如果將正偶數視為數列，數學上習慣記成 $a_n = 2n$ ，n 是正整數		

(二)以等差數列1、4、7、10、13、16…說明如何推導第n項的值：

項次	值	算式拆解(加法)	算式拆解(乘法)	一般項算式
1	$a_1=4$	4	$4+3\times 0$	$4+3\times(1-1)$
2	$a_2=7$	$4+3$	$4+3\times 1$	$4+3\times(2-1)$
3	$a_3=10$	$4+3+3$	$4+3\times 2$	$4+3\times(3-1)$
4	$a_4=13$	$4+3+3+3$	$4+3\times 3$	$4+3\times(4-1)$
5	$a_5=16$	$4+3+3+3+3$	$4+3\times 4$	$4+3\times(5-1)$

得到 $a_n = 4 + 3\times(n-1)$ ， $n=1、2、3、4、5、\dots$

題號	28		
內容領域	幾何	認知歷程向度	概念理解
分年細目	8-s-18：能從幾何圖形的判別性質，判斷圖形的包含關係。		
試題內容	<p>甲說：菱形也是平行四邊形。</p> <p>乙說：長方形也是平行四邊形。</p> <p>丙說：正方形也是長方形。</p> <p>請問哪些人的說法正確？</p> <p>① 只有甲和乙 ② 只有甲和丙</p> <p>③ 只有乙和丙 ④ 三個人都正確</p>		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.45	0.50	0.31
2	0.13	0.19	0.09
3	0.14	0.15	0.13
4*	0.27	0.15	0.47
未作答	0.01	0.00	0.00
通過率	0.27	鑑別度	0.32
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.32，試題品質佳；通過率為 0.27，試題難易度中偏易。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 4，通過率為 27%，顯示近三成的學生已能從幾何圖形的性質，判斷圖形的包含關係。</p> <p>(3)有 45%的學生選擇選項 1(低分組有 50%、高分組有 31%)，這些學生可能無法從幾何圖形的性質，判斷圖形的包含關係；也可能受國小低年級或直觀的影響，誤認為正方形不屬於長方形。</p> <p>(4)有 13%的學生選擇選項 2(低分組有 19%)，這些學生可能無法從幾何圖形的性質，判斷圖形的包含關係。</p> <p>(5)有 14%的學生選擇選項 3(低分組有 15%、高分組有 13%)，這些學生可能無法從幾何圖形的性質，判斷圖形的包含關係；也可能無法直觀的判斷菱形兩雙對邊互相平行，因此認為菱形不是平行四邊形。</p>		
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>4-s-01：能運用「角」與「邊」等構成要素，辨認簡單平面圖形。</p>		

	<p>評量重點：</p> <p>8-s-18：能從幾何圖形的判別性質，判斷圖形的包含關係。</p>
<p>補救教學 建議</p>	<p>(一)國小階段不討論圖形間的包含關係，教師可以透過圖形的定義，例如長方形的定義：四個角都是直角的四邊形稱為長方形；正方形的定義：四邊等長且四個角都是直角的四邊形稱為正方形，幫助學生經驗正方形也滿足長方形的定義，所以正方形也可以說是長方形。</p> <p>(二)教師可以幫助學生察覺長方形兩雙對邊互相平行，滿足平行四邊形的定義，所以長方形也是平行四邊形；相同的理由，菱形兩雙對邊互相平行，滿足平行四邊形的定義，所以菱形也是平行四邊形。</p>

題號	29		
內容領域	數與量	認知歷程向度	程序執行
分年細目	8-n-02：能求二次方根的近似值。		
試題內容	請問 $\sqrt{50}$ 的小數部份為何？ ① 0.07 ② $\sqrt{50}-7$ ③ $\sqrt{50}-5$ ④ $10-\sqrt{50}$		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1	0.37	0.42	0.21
2*	0.26	0.13	0.51
3	0.22	0.23	0.22
4	0.14	0.21	0.05
未作答	0.01	0.00	0.00
通過率	0.26	鑑別度	0.38
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.38，試題品質佳；通過率為 0.26，試題難易度中偏難。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 2，通過率為 26%，顯示近三成的學生已掌握二次方根近似值的意義，知道將根式記成帶小數，減去整數的部份後，剩下的就是純小數部份。</p> <p>(3)有 37%的學生選擇選項 1(低分組有 42%)，這些學生可能無法掌握二次方根近似值的意義，也不知道將根式記成帶小數，減去整數的部份後，剩下的就是純小數部份，本題只有選項 1 是小數的樣式，因此選擇小數為答案。</p> <p>(4)有 22%的學生選擇選項 3(低分組有 23%、高分組有 22%)，這些學生可能無法掌握二次方根近似值的意義，誤認為 $\sqrt{50}$ 介於整數 5 和 6 之間，但知道將根式記成帶小數，減去整數的部份後，剩下的就是純小數部份，所以選擇 $\sqrt{50}-5$ 為答案。</p> <p>(5)有 14%的學生選擇選項 4(低分組有 21%)，這些學生可能無法</p>		

	<p>掌握二次方根近似值的意義，誤認為$\sqrt{50}$ 介於整數 9 和 10 之間，但知道將根式記成帶小數，減去整數的部份後，剩下的就是純小數部份，所以選擇 $10 - \sqrt{50}$ 為答案。</p>
教材地位分析	<p>先備的知識：</p> <p>8-n-01：能理解二次方根的意義及熟練二次方根的計算。</p> <p>評量重點：</p> <p>8-n-02：能求二次方根的近似值。</p>
補救教學建議	<p>(一)以教師可以利用計算機按出$\sqrt{50}$ 大約是 7.9711，先說明$\sqrt{50}$ 的整數部份是 7，小數部份是 0.9711，再說明$\sqrt{50}$ 介於 7 和 8 之間，所以減去整數 7，剩下的就是小數部份。</p>

題號	30		
內容領域	數與量	認知歷程向度	概念理解
分年細目	8-n-03：能理解根式的化簡及四則運算。		
試題內容	算算看， $\sqrt{1\frac{9}{16}}=?$ ① $\frac{5}{4}$ ② $\pm\frac{5}{4}$ ③ $1\frac{3}{4}$ ④ $\pm 1\frac{3}{4}$		
選答率	答題反應比率（*表正確答案）		
選項	整體	低分組	高分組
1*	0.21	0.12	0.36
2	0.45	0.34	0.56
3	0.12	0.22	0.02
4	0.20	0.30	0.05
未作答	0.01	0.00	0.00
通過率	0.21	鑑別度	0.24
試題品質分析	<p>(1)本題鑑別度為 0.24，試題品質尚可；通過率為 0.21，試題難易度難。</p> <p>(2)本題正確答案為選項 1，通過率為 21%，顯示超過二成的學生已具備將根式化簡的能力。</p> <p>(3)有 45%的學生選擇選項 2(低分組有 34%、高分組有 56%)，這些學生可能已具備將根式化簡的能力，但混淆二次方根與根式的意義，誤以為根式都有正負兩組解。</p> <p>(4)有 12%的學生選擇選項 3(低分組有 22%)，這些學生可能不具備將根式化簡的能力，將帶分數分成整數和真分數兩部份後，利用$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$算出答案。</p> <p>學生可能的算法如下：$\sqrt{1\frac{9}{16}}=\sqrt{1}+\sqrt{\frac{9}{16}}=1+\frac{3}{4}=1\frac{3}{4}$。</p> <p>選擇 $1\frac{3}{4}$ 為答案。</p> <p>(5)有 20%的學生選擇選項 4(低分組有 30%)，這些學生可能不具備將根式化簡的能力，將帶分數分成整數和真分數兩部份後，利用$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$算出答案；這些學生可能也混淆二次方根與根式的意義，誤以為根式都有正負兩組解。</p> <p>學生可能的算法如下：$\sqrt{1\frac{9}{16}}=\sqrt{1}+\sqrt{\frac{9}{16}}=1+\frac{3}{4}=1\frac{3}{4}$。</p>		

	選擇 $\pm 1\frac{3}{4}$ 為答案。
教材地位 分析	<p>先備的知識： 8-n-01：能理解二次方根的意義及熟練二次方根的計算。</p> <p>評量重點： 8-n-03：能理解根式的化簡及四則運算。</p>
補救教學 建議	<p>(一)學生較不容易理解$\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 4} = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$，宜改寫成$\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 2 \times 2} = \sqrt{2 \times 2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$。</p> <p>(二)教師應說明根式內有帶分數時無法直接化簡，必須將帶分數改記成假分數後才能化簡。</p>